

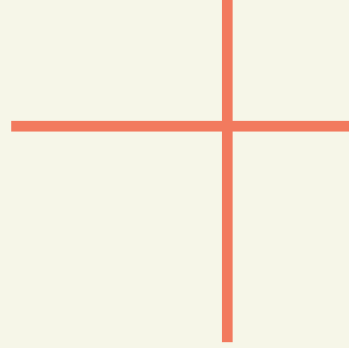
GUIDA  
PEDAGOGICA:  
VR PER LA  
MATEMATICA

“

**L'unica fonte di  
conoscenza è l'esperienza**

”

ALBERT EINSTEIN



# INDICE DEI CONTENUTI

- 04** L'approccio non formale nell'insegnamento della matematica
- 32** La matematica e i disturbi specifici dell'apprendimento
- 35** Integrare la tecnologia VR con l'approccio non formale nell'insegnamento della matematica
- 41** Aspetti pedagogici della tecnologia VR
- 50** Aspetti pratici dell'uso combinato dell'approccio non formale e delle innovazioni della tecnologia VR per la matematica nella classe

# L'APPROCCIO NON FORMALE NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

## INTRODUZIONE: COS'È L'APPROCCIO NON FORMALE NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

*Educazione non formale: qualsiasi attività educativa organizzata svolta fuori dal sistema formale di istruzione – sia che si svolga in maniera separata che come aspetto principale di un'attività più ampia – che sia rivolta a soggetti bene identificabili e con obiettivi formativi chiaramente definiti.*

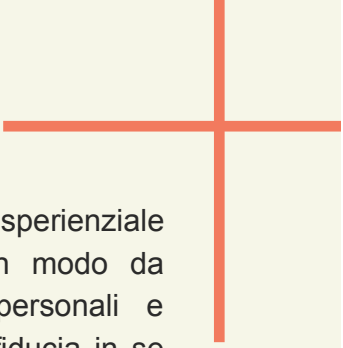
**Coombs, Prosser and Ahmed, 1973**

L'educazione non formale ha molte delle caratteristiche tipiche dell'educazione formale, dal momento che entrambe condividono l'impegno all'apprendimento e all'acquisizione di conoscenze, così come l'essersi sviluppate secondo curriculum progettati metodologicamente e risorse scientifiche. Comunque, ci sono molti punti di divergenza, il più ovvio dei quali è il fatto che l'educazione formale ha luogo in un edificio scolastico, mentre l'educazione non formale può avvenire in qualsiasi luogo che appartiene alla comunità. L'educazione non formale, dunque, può utilizzare club, campeggi, meeting di gruppo, attività sportive o artistiche oppure eventi organizzati per i giovani per portare avanti un percorso educativo: può, dunque, avvenire in un gran numero di contesti sociali e pubblici, in diverse forme.

### **“Educazione democratica” attraverso l'apprendimento esperienziale**

L'educazione non formale può produrre benefici nello sviluppo in vari modi. Come affermano Van Horn, Flanagan e Thomson (1998), l'educazione non formale promuove l'apprendimento esperienziale, la prerogativa della scelta personale e favorisce l'emergere di differenti tipologie di relazioni interpersonali. Assegnando in maniera strutturata il lavoro, attraverso compiti e attività creative, i giovani sono incoraggiati a prendere decisioni circa le modalità di lavoro che preferiscono utilizzare per acquisire proficuamente conoscenze, sentendosi allo stesso tempo liberi di esplorare ad ampio raggio le proprie abilità e ciò che comincia a interessarli.

L'educazione non formale ha per fondamento la connessione dell'individuo con la comunità, di modo che tutte le attività possano rispondere ai bisogni e alle richieste degli individui, ma all'interno delle sfide che la comunità sociale stessa deve affrontare (Carver, 1998). In questo senso l'individuo e la comunità hanno una relazione reciproca di dare e avere.



Enfield (2001) afferma altresì che il parametro dell'apprendimento esperienziale promuove lo sviluppo di abilità e conoscenze, quando è strutturato in modo da coinvolgere il discente, facilitando così l'acquisizione di abilità interpersonali e l'interattività. Afferma anche che l'apprendimento esperienziale migliora la fiducia in se stessi attraverso la creatività e sviluppa le relazioni personali in ambienti non formali, non solo tra i giovani, ma anche tra giovani e adulti. In più, i risultati di alcune ricerche indicano che, oltre al livello cognitivo, i metodi di educazione non formali “favoriscono lo sviluppo positivo del giovane, indipendentemente dal metodo, dal setting o dal background del giovane in questione” (Russel, 2001).

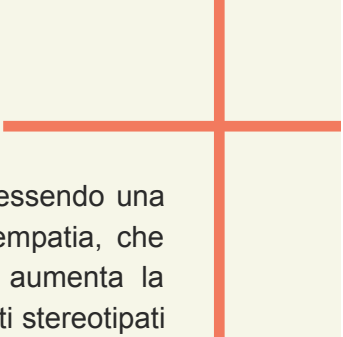
Attraverso un processo esperienziale di questo tipo, i giovani hanno la possibilità di sviluppare una serie di *soft skills* – ovvero la possibilità di esplorare abilità, competenze e valori personali che non sono sempre facilmente individuabili all'interno del quadro educativo dei sistemi formali – come: gestione organizzativa, lavoro di squadra, gestione del conflitto, pianificazione, coordinamento e organizzazione, fiducia in se stessi e autostima, praticità, responsabilità, leadership, affinamento nell'abilità di risolvere problemi in modo pratico, disciplina, consapevolezza interculturale e molte altre soft skills correlate all'educazione globale.

In conclusione, l'educazione non formale sembra avere un'influenza positiva su quattro pilastri fondamentali che sono intrecciati alla vita di un giovane:

**Nello sviluppo personale:** aiuta i giovani ad aumentare la propria fiducia in se stessi e autostima, a comprendere i propri punti di forza e debolezza, incoraggiandoli a uscire dagli angusti limiti della propria zona di comfort e a scoprire le potenzialità delle proprie abilità, doni e talenti;

**Nello sviluppo della cittadinanza attiva:** promuove le abilità sociali e le competenze collegate alla cittadinanza, così come l'espressione e la comprensione di opinioni differenti presenti all'interno delle nostre società sempre più diversificate. Fa conoscere ai giovani importanti strutture e concetti sociali e politici, come anche il compito di una partecipazione attiva e democratica;

**Nel favorire l'occupabilità:** È forse il modo migliore per acquisire le abilità orizzontali che sono richieste dal mondo del lavoro: pensiero critico e creativo, iniziativa, problem solving, valutazione del rischio, prendere decisioni, gestione costruttiva delle emozioni, resilienza;



**Nella formazione di società più umane**, dal momento che avvicina la gente, essendo una forza capace di modificare il comportamento umano. Costruisce le basi per l'empatia, che aiuta a comprendere sia la mentalità che i sentimenti altrui. Questa abilità aumenta la sensibilità sociale degli individui, rendendoli capaci di lottare contro comportamenti stereotipati e altri fenomeni interrelati come intimidazione, pregiudizio, razzismo.

In generale, i metodi di apprendimento non formali mantengono viva una vivace tradizione europea, dal momento che sin dagli anni '90 sono stati considerati dal Consiglio d'Europa la metodologia principale – insieme alla filosofia alla loro base – per quanto riguarda i programmi giovanili organizzati con l'uso esclusivo dei fondi europei.

### **Apprendere la Matematica in un ambiente educativo non formale**

Ad oggi, studi come quelli di Carraher e Schliemann (2002) riaffermano l'idea che la matematica non formale può fornire una base sulla quale i discenti possono davvero fare affidamento per costruire conoscenze matematiche più sofisticate. Questi due autori reputano che le attività non formali in classe dovrebbero permettere al discente di sperimentare una pluralità di situazioni, strumenti e concetti matematici che rendano esplicito il collegamento tra la matematica della vita quotidiana e quella insegnata a scuola.

Con la matematica non formale, il discente è al centro dell'apprendimento: scopre, manipola e modella. Le attività possono essere basate sull'apprendimento individuale o di gruppo come parte di un approccio generalmente collettivo, sono partecipative e centrate sul discente, sono basate sull'azione e sull'esperienza.

La matematica non formale può, inoltre, rendere più chiara la disciplina per i più giovani e, in tal modo, incoraggiare lo studio delle materie STEM (Scienza, Tecnologia, Ingegneria e Matematica), contribuendo così allo sviluppo economico dei nostri Paesi.

## STRUMENTI PER L'APPRENDIMENTO NELL'EDUCAZIONE NON FORMALE

### Cos'è uno strumento per l'apprendimento?

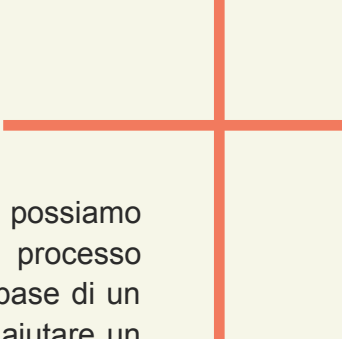
Come vedremo più in là, è abbastanza difficile comprendere cosa la nozione “metodi non formali” significhi davvero, se ci si sofferma soltanto sulla sua pur chiara definizione; di fatto, sarebbe molto più semplice provare a comprendere questi “metodi non formali” attraverso le loro caratteristiche, tenendo in mente che potrebbero essere sinteticamente classificati in quattro sottocategorie:

- Metodi basati sulla comunicazione, fondati sull'interazione, dialogo e mediazione;
- Metodi basati sull'attività, fondati sull'esperienza, sulla pratica e sulla sperimentazione;
- Metodi basati sulla socializzazione, fondati sulla collaborazione, sul lavoro di gruppo e sulla creazione di rete;
- Metodi basati sull'autogestione, fondati sulla creatività, sulla scoperta e sulla responsabilità.

[Fonte: Council of Europe Symposium on Non-Formal Education: Report (2001)]

Dunque, se l'educatore / docente / formatore vuole usare uno o una combinazione di metodi non formali che ricadono nelle categorie succitate per facilitare il processo di apprendimento di un concetto matematico, prima di tutto dovrebbe progettare uno strumento educativo completo, fundamentalmente costituito da metodi non formali.

Per questo motivo, crediamo che sia importante, per ora, spiegare cosa sia uno strumento per l'apprendimento, come si riconosca e quali siano i criteri che tale strumento dovrebbe soddisfare. Quindi, dopo aver fornito queste informazioni teoriche, insieme a tre esempi analitici di strumenti matematici (ognuno diviso per fascia d'età) basati su metodi d'educazione non formale, l'educatore / docente / formatore che si trova a dover insegnare nozioni matematiche sarà capace di progettare e costruire i propri strumenti matematici per l'apprendimento.



Per cominciare, uno strumento educativo è, soprattutto, qualcosa che possiamo associare con un approccio e che è stato sviluppato per facilitare un processo educativo. In altre parole, lo strumento costituisce un mezzo costruito sulla base di un approccio educativo e metodologico, che ha come primo obiettivo quello di aiutare un pubblico a comprendere o ad apprendere, rendendolo capace di acquisire nuove conoscenze.

Perciò, uno strumento educativo ha in sé la capacità di trasformare in pratica obiettivi educativi chiaramente definiti, coinvolgendo nello stesso tempo il gruppo nel processo d'apprendimento. Una delle caratteristiche più significative è che uno strumento deve poter stare in piedi da solo. Ciò significa che lo strumento dovrebbe sviluppare un processo educativo forse breve, ma del tutto completo, che non abbia bisogno di nessun intervento esterno aggiuntivo per avere senso.

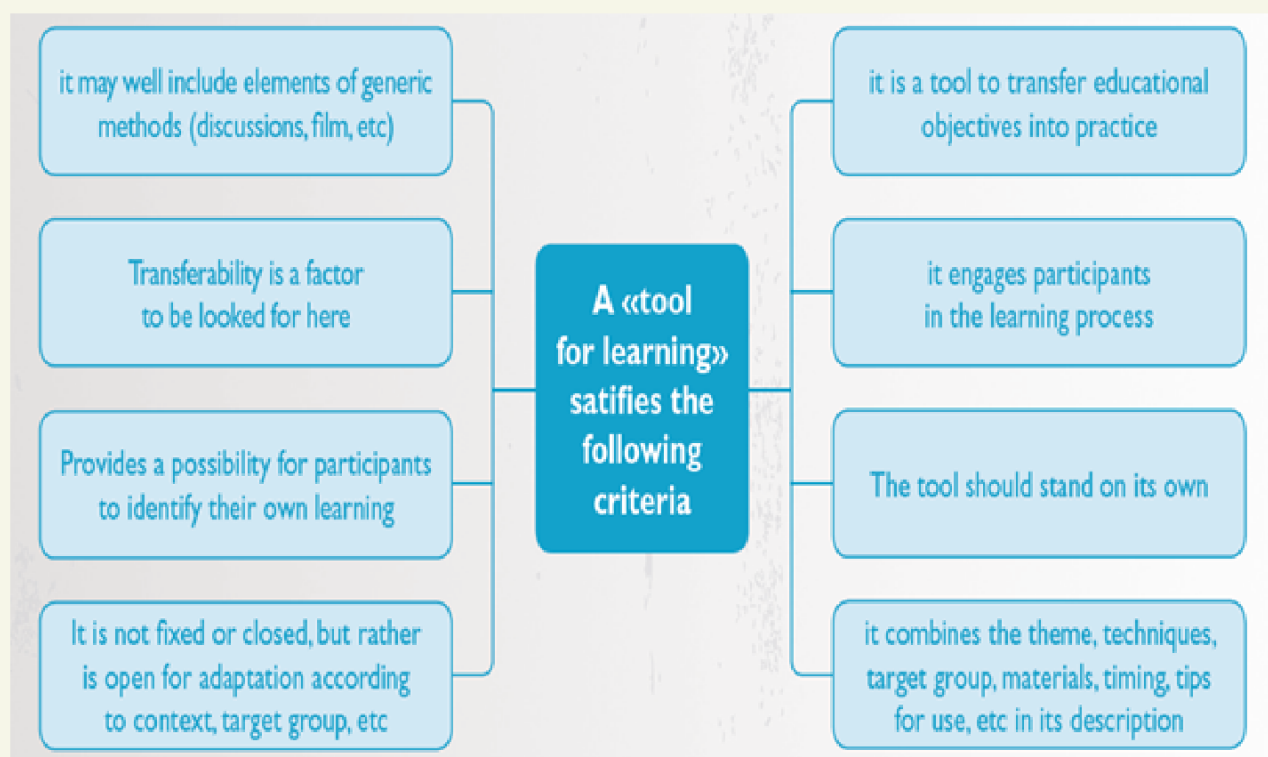
Il fatto che uno strumento dovrebbe stare in piedi da solo non implica necessariamente che non possa essere modificato; al contrario, uno strumento educativo dovrebbe essere flessibile e abbastanza aperto, in modo tale da permettere di essere usato in differenti contesti, dando sempre la possibilità di essere adattato, combinato e ulteriormente sviluppato, a seconda delle reali condizioni e dell'ambiente nel quale viene utilizzato. Questa caratteristica propria dello strumento – che in parallelo costituisce uno dei suoi obiettivi fondamentali – è chiamata trasferibilità.

Non dimentichiamoci che uno strumento educativo combina metodi non formali che possono essere basati sulla comunicazione, sull'attività, sulla socializzazione e/o sull'autogestione. Perciò uno strumento per l'apprendimento può essere un esercizio di simulazione come un gioco di ruolo, un laboratorio che favorisca la creatività e sviluppi capacità di immaginazione e di narrazione, un'attività che avvenga all'esterno o una che richieda processi esperienziali e fatti ripresi dalla vita quotidiana. Uno strumento educativo può essere un gioco, un video interattivo, una storia, una discussione, un manufatto, un film, una foto o un'immagine accompagnata ad un testo o addirittura una combinazione di alcune (o tutte) le possibilità citate, sempre fornito in un ordine logico e in modo tale da facilitare l'esperienza d'apprendimento.




## Principi per la concezione di uno strumento per l'apprendimento nell'educazione non formale

Come si evince dal precedente paragrafo, uno strumento per l'apprendimento nell'educazione non formale è distinguibile da caratteristiche peculiari, che devono soddisfare alcuni criteri. Questi criteri (o principi) che uno strumento deve soddisfare sono presentati nel seguente diagramma:



Fonte: Council of Europe Symposium on Non-Formal Education: Report (2001)

Stando al diagramma, un efficace strumento per l'apprendimento nell'educazione non formale deve combinare tutti e otto i criteri contemporaneamente. Di conseguenza, quando l'educatore / docente / formatore vuole creare i propri strumenti educativi, può utilizzare il diagramma precedente come una checklist per assicurarsi che il proprio strumento sia efficace e che la sua progettazione sia basata su principi validi e oggettivi.



Inoltre, bisogna considerare alcuni altri utili punti durante il processo di costruzione di uno strumento educativo. Eccone un breve sommario:

- Uno strumento dovrebbe dare senso all'esercizio;
- Uno strumento dovrebbe essere facilmente utilizzabile da chiunque (o dai destinatari per cui è stato ideato), senza escludere nessuno dal processo di apprendimento;
- Uno strumento dovrebbe essere scritto con un linguaggio preciso e dovrebbe veicolare messaggi chiari in modo vivace;
- Uno strumento dovrebbe facilitare i processi di aggiunta, modifica e adattamento delle informazioni;
- Uno strumento dovrebbe essere dinamico, accattivante e concentrarsi su processi interattivi;
- Uno strumento dovrebbe essere bilanciato e dovrebbe promuovere la nozione di bilanciamento, essendo utile allo stesso tempo sia all'individuo che alla collettività;
- Uno strumento dovrebbe spingere i discenti a oltrepassare i propri limiti, uscendo dalla propria zona di comfort, senza tuttavia spaventarli o dar loro l'impressione di non potercela fare;
- Uno strumento dovrebbe essere un invito a esplorare qualsiasi spazio possibile lungo i sentieri dell'immaginazione e della creatività;
- Uno strumento dovrebbe portare avanti l'idea dell'*apprendimento attivo*.

## Aiuto all'insegnamento: Media e Tecniche

Durante la procedura di costruzione di uno strumento educativo, l'educatore / docente / formatore dovrebbe ricordare che bisogna seguire una metodologia concreta, fatta di passi chiari, che potrebbero probabilmente seguire questo schema:

Titolo / Fascia d'età o destinatari / Durata / Concetti matematici con cui lo strumento ha a che fare / Scopo generale / Obiettivo / Istruzioni per l'uso (processo passo dopo passo) / Materiali e risorse / Media / Tecniche e metodi / Suggerimenti per l'educatore / Risultati attesi e competenze / Esposizione / Domande per la valutazione.

Perciò, dopo aver scelto con cura i *concetti matematici* con i quali lo strumento avrà a che fare e aver preso le decisioni definitive sullo *scopo generale* e sugli *obiettivi* dello strumento, l'educatore dovrebbe essere pronto a scrivere le *istruzioni per l'uso*, analizzando il *processo passo dopo passo* nel dettaglio. Anche prima di portare a termine il *processo passo dopo passo*, l'educatore / insegnante / formatore può definire l'*aiuto all'insegnamento* di cui si vorrà avvalere. Nel dire "aiuto all'insegnamento", intendiamo il supporto all'insegnamento che è composto innanzitutto da tutti i *media* e le *tecniche* che saranno inclusi nella progettazione e nella costruzione dello strumento. A questo punto, sarebbe bene notare che, spesso, i *media* sono forniti in modo tale da essere collegati a una o più tecniche: in altre parole, non è sempre possibile distinguere i *media* dalle *tecniche* corrispondenti.

Ciò considerato, la tabella sottostante fornisce una lista dei *media* e delle *tecniche* più usate:

TEACHING SUPPORT OR AID:	MEDIA	TECHNIQUE	MIXED MEDIA AND TECHNIQUES
	White board or Paperboard	Use of White Board or Paperboard in order to present, observe and/ or summarize a new knowledge etc.	
	Computer	Use of Computer in order to present data, to complete a task, to conduct research on a topic, to use a specific program etc.	
	E-Video	The projection of an E-Video in order to give information on a topic or a concept. It could be a documentary, a film etc.	
	Video Projector	Use of Video Projector in order to facilitate the process of a video presentation.	
	Book	Use of a Book in order to say a story, to introduce a new concept, to give new knowledge, to provide historical or other features, to cultivate a positive stance towards a topic or a concept, to cultivate imagination, to broaden the field of knowledge, etc.	
	Photos or Pictures with or without Text	Use of photos in order to convey a vivid message, to represent a concept or a task, to give explanatory information, to make the instructions more precise, etc.	
	Graphs, Tables, Diagrams, Maps	Use of Graphs, Tables, Diagrams and Maps in order to depict information, to provide features in a more readable way, to map an order of information.	
	Graphics	Use of Graphics in order to make the presentation of other Media more attractive, to add meaning in a text, etc.	
			Games: To learn easily, to absorb a new concept, to show the applicability of a concept, to cultivate a positive stance towards a concept, etc.
			Stories/Storytelling: To introduce a new concept, to give new knowledge, to provide historical or other features, to cultivate a positive stance towards a topic or a concept, to

			<p>cultivate imagination, to broaden the field of knowledge, etc.</p> <p>Case Study: To provide a new knowledge through giving a concrete example, to add new possible methods of making a research, to learn how a theory is being applied, etc.</p> <p>Simulation Exercise (such as Role-Play): to introduce and absorb a knowledge within a creative way, to put one in a position of another person, to cultivate empathy and compassion, etc.</p> <p>Group Discussions and Presentations: To urge the exchange of opinions and knowledge, to learn how to raise good argumentation, to work on communication skills, to build-up one's own methodology in discovering and presenting something, to learn how to make research related to a specific topic, to learn how to put the things down in well-organized way</p>
--	--	--	---

Tabella: Supporto e aiuto all'insegnamento: Media e tecniche

## UN ESEMPIO DI STRUMENTI NON FORMALI RELATIVI ALLA MATEMATICA CHE POTREBBERO ESSERE INCORPORATI NEL CURRICOLO UFFICIALE DI MATEMATICA

### UN ESEMPIO DAL PROGETTO “INFORMATH”, SOVVENZIONATO DA FONDI EUROPEI

In questo paragrafo, forniremo al lettore un buon esempio di uno strumento non formale, chiamato “Lo studente guerriero: un’avventura nell’Analisi”, che è stato ripreso dal progetto Erasmus+ “Informath”. Questo specifico strumento si compone di un libro-game che aiuta gli studenti (di età compresa tra i 16 e 18 anni) a testare le proprie abilità nello studio di funzioni.

#### *“Lo studente guerriero: un’avventura nell’Analisi”*

##### **Fascia d’età – destinatari**

La fascia d’età comprende studenti della scuola secondaria dai 16 ai 18 anni. Gli studenti devono aver imparato l’analisi e lo studio di funzioni.

##### **Durata**

La durata del gioco può arrivare a 30 minuti, a seconda del grado di abilità degli studenti in Analisi.

##### **Concetti matematici con cui lo strumento ha a che fare**

Il gioco ha a che fare con i concetti matematici di funzione, grafo, monotonicità, differenziabilità, segno della funzione, punti di minimo e massimo e concavità.

##### **Scopo generale – obiettivo**

Il fumetto “Lo studente guerriero” è un libro-game che aiuta gli studenti a testare le proprie abilità nello studio di funzioni. Durante il gioco, gli studenti dovranno analizzare una funzione. L’analisi si dividerà in diversi passi. All’interno della storia sono presenti numerosi errori comuni e basilari sullo studio di funzione, di modo che gli studenti possano evitare di compiere tali errori, visualizzandoli attraverso la grafica e un’avventura basata sulla matematica facile da ricordare. Tramite questo fumetto gli studenti analizzeranno le funzioni divertendosi.

## Soft skill collegate al gioco

Problem solving, fiducia in se stessi, capacità di prendere decisioni

## Materiali e risorse

Il gioco a fumetti “Lo studente guerriero” è un booklet di 44 pagine. Ogni studente che partecipa all’avventura dovrà disporre di una penna o di una matita e di un foglio, per poter rispondere alle domande e ai problemi proposti.

## Processo passo dopo passo

In generale, per il libro-game:

Lo scenario di questo libro d’avventura matematica si compone di due mondi paralleli: il primo, nel quale il lettore è uno studente che risolve un esercizio; il secondo, nel quale il lettore è un guerriero che vive un’avventura. Ogni studente che partecipa all’avventura dovrebbe leggere il fumetto e risolvere gli esercizi / enigmi / problemi correttamente. A seconda di quale risposta sarà data ad ogni passo, il fumetto indirizzerà il lettore a una pagina differente, che mostrerà se il guerriero ha vinto o perso. Perciò, se il lettore, in veste di studente, risolve il problema correttamente, allora il guerriero uscirà vincitore dalle prove. Se il lettore, comunque, in veste di studente compie errori, allora il guerriero si troverà a fronteggiare difficoltà nell’avventura.

Ogni scelta errata comporta la perdita di punti energia. Se lo studente commette troppi errori e perde tutti i punti, viene sconfitto. I punti energia iniziali dello studente sono 5. Ad assisterlo nella sua avventura c’è un gufo (figura 1).

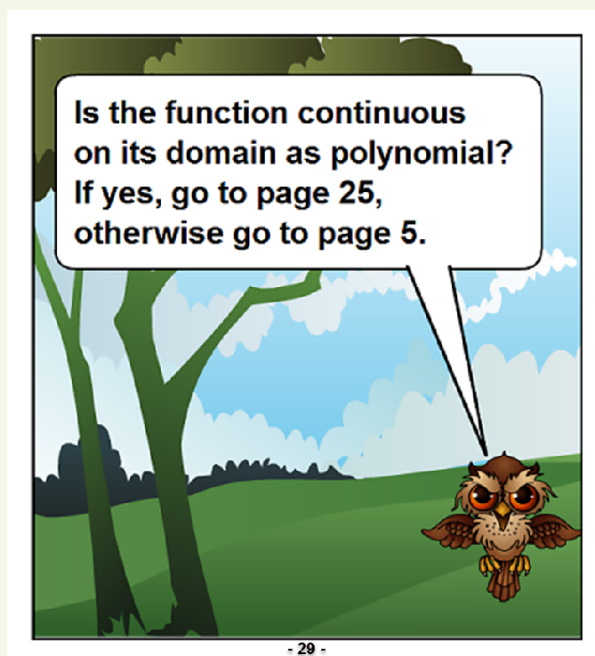


Figura 1. Il gufo dà indicazioni allo studente.

Lo studente lettore ha il compito di studiare e costruire una funzione (figura 2).


$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - x}$$

Figura 2. La funzione che dovrà essere analizzata dallo studente.

Il guerriero dovrà fronteggiare l'immaginaria banda dei Contrappositori. Questa banda è formata dal Ninja Osho, dall'Uomo delle caverne, dal Gorilla Iverne e dal Serpentone (figura 3). Tutti e quattro proveranno a fermarlo. Il guerriero deve essere sempre all'erta.



Figura 3. La banda dei Contrappositori, il gruppo di antagonisti.

Se il guerriero avrà successo nel completare l'avventura senza giungere a 0 punti energia, allora il guerriero studente avrà vinto.

L'avventura del fumetto si dipana da una pagina all'altra, ma non in ordine numerico (il lettore non vede facilmente il seguito della storia alla pagina successiva).

Il gioco è pensato per essere giocato individualmente, ma può anche essere giocato da una coppia di studenti.



## Un caso ipotetico di gioco

Prendiamo il caso seguente: il lettore è a pagina 18 e lo studente deve trovare il dominio della funzione. Il gufo definisce  $A=R-\{-1\}$  come dominio. Se il lettore ha trovato lo stesso dominio, allora deve andare a pagina 30; in caso contrario, a pagina 36 (figura 4).

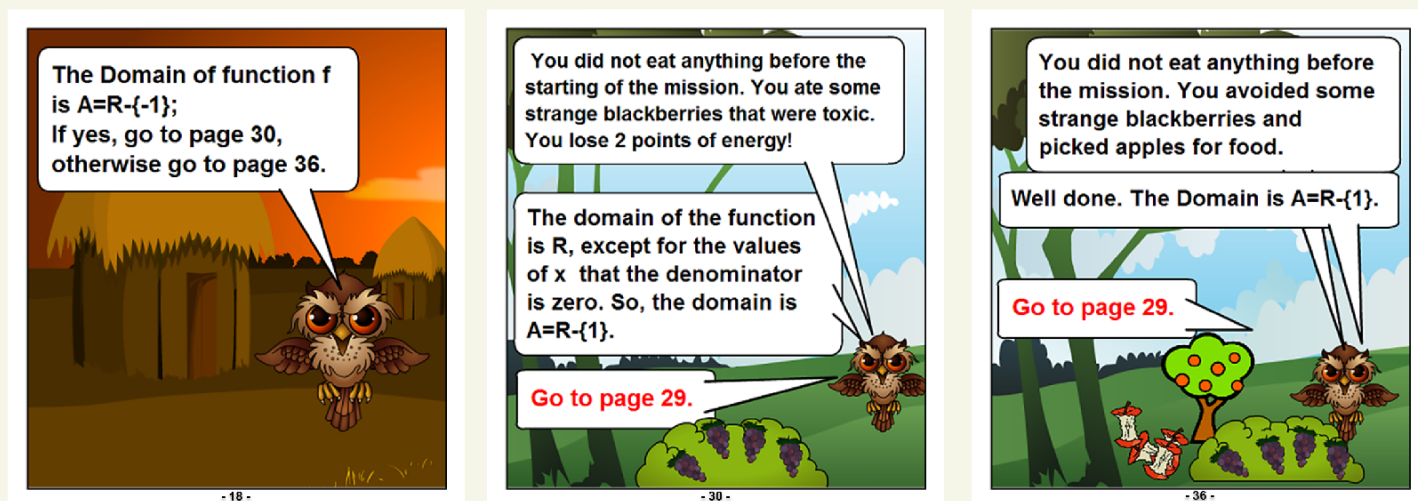


Figura 4. Un problema, un esito positivo e negativo della missione.

Quindi, se lo studente va a pagina 30 (scelta errata), il guerriero avrà problemi, mentre se va a pagina 36 (scelta corretta), il guerriero uscirà illeso dalla prova.

## Metodi e tecniche di insegnamento

Il gioco si basa su una categoria di libri che sono chiamati avventure libro-game. Nella versione di questo libro, l'insegnante ha aggiunto un mondo parallelo, ovvero il mondo dello studente che, con le sue risposte, influenza quello in cui opera il guerriero. Inoltre, invece di un semplice testo, l'azione è rappresentata attraverso un fumetto (utilizzando la piattaforma internet toondoo).

I metodi e le tecniche di insegnamento utilizzati sono:

- Lettura;
- Ricerca individuale della soluzione;
- Gioco;
- Evoluzione individuale della storia a seconda delle scelte dello studente;
- Uso di grafica e fumetti;
- Ricompense per le risposte corrette e spiegazioni in caso di risposta errata;
- Focalizzazione su errori comuni e basilari, visualizzandoli attraverso la grafica e con una modalità che faciliti la memorizzazione.

## Suggerimenti per l'educatore

Nel futuro, sarebbe bene supportare la storia del fumetto con più testo, narrazione e una storia migliore, che possa sviluppare l'immaginazione dello studente. Come parte del progetto educativo dello studente, l'educatore può richiedere agli studenti di produrre un fumetto simile a "Lo studente guerriero", utilizzando un software per la produzione di fumetti (come toondoo o similare).

## Domande per la valutazione

Per poter migliorare questo gioco matematico, sarebbe necessario valutarlo. Possibili domande da porre agli studenti potrebbero essere:

- Ti è piaciuta la storia del guerriero studente?
- È stato difficile muoversi all'interno del fumetto?
- Pensi che osservare la matematica da un altro punto di vista ti abbia aiutato?
- Infine: preferisci un tipico esercizio o uno svolto attraverso questo tipo di fumetto?

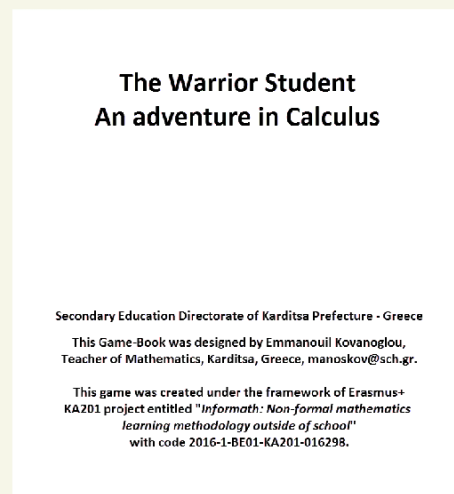
## Risorse

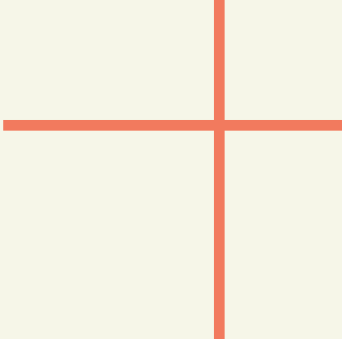
Tutte le vignette del fumetto sono state create tramite [www.toondoo.com](http://www.toondoo.com)

I grafici sono stati creati tramite Geogebra.

Il font del titolo è stato creato attraverso [www.cooltext.com](http://www.cooltext.com)

## Materiali (pagine del booklet)





You are a warrior student and you participate in a mathematical adventure. Your mission is to study, analyze and sketch the curve of the function:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - x}$$

- You will have to deal with the Contrapositive team.  
 - This group consists of Ninja Osho, the Caveman, the Gorilla Iverne and the Big Snake.  
 - The four enemies will try to stop you.  
 - Beware!

- To succeed in your mission, you must follow several stages.  
 - Caution, because any wrong choice reduces the points of energy and you may lose.  
 - Your initial points of energy are five.  
 - We're starting the mission!  
 - Write on the paper the points of energy that you start with.  
 - The paper will also be used for solving and answer to queries.  
 - Go to page 4.

Will you solve the  $x^2 + x - 1 = 0$  or manage the  $1-x$ ;  
 If you solve the first go to page 14, otherwise go to page 38.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - x}$$

Ninja Osho was hidden behind the only bush in the area. You were prepared and he was defeated.

Right! Function  $f$  is continuous as rational.

The next time you will not see me.

Go to page 17.

It was a cloudy night. It was easy for Osho to attack you.  
 You lose one energy point.

Beware! It is true that  $-5 < -1$ , but there is a relative minimum at  $x=0$  the  $f(0)=-1$  and a relative maximum at  $x=2$  the  $f(2)=-5$ .

This battle was mine.

Go to page 26

Big Snake guarded and bite you. You ran away but you lose power.

$$f'(x) = \frac{(2x^2+1)(1-x) - (x^2+x-1)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2} \quad \text{or} \quad -\frac{x(x-2)}{(1-x)^2}$$

You lose one point of energy.

Go to page 9.

The Big Snake took the opportunity and hit you with the tail. You lose one energy point.

The table is correct.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+		-
f(x)	↗		↘

Contrapositive rules!

Go to page 16.

- You must find the sign of derivative.  
 - Does the sign depend on the numerator or denominator?  
 • If you choose the numerator go to page 35.  
 • If you choose the denominator go to page 20.

In general, the sign of  $f'$ ...

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2} = 0 \Leftrightarrow$$


$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ or } x = +2$$

In general, what will be the sign of  $f'(x)$ ?

- If the signs are -+|- go to page 31.
- If the signs are +|- go to page 12.




- 11 -

Yverne attacked you!  
You lose one point of energy.

Wrong!  
The sign of  $f'$  is -+|-

Go to page 33.



- 12 -

You made a big feline with Shadow Hand magic.  
Big Snake vanished into thin air.

The table is correct.

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$			

Go to page 16




- 13 -

You forgot to find the domain of the function and so the results will be fictitious and probably wrong.  
You also needlessly waste time on something you were not asked for.

You were completely careless and the Gorilla attacked you with a sign and you lost

You lose one energy point!  
Go to page 18!




- 14 -

It was night but with a bright moonlight.  
So, it was easy to avoid him.

Right! There is relative minimum at  $x=0$  the  $f(0)=-1$  and relative maximum at  $x=2$  the  $f(2)=-5$ .

Next time!


Go to page 26.



- 15 -

You should find the horizontal asymptotes of the function  $f$ .  
I remind you that  $A = \mathbb{R} - \{1\}$ .

- If there is at least one horizontal asymptote go to page 19,
- otherwise go to page 34.




- 16 -

- We will find the derivative of  $f$ .
- The function  $f$  is differentiable as rational.
- Find  $f'(x)$ .


- Go to page:

- 10 if  $f'(x) = \frac{-x^2+2x}{1-x}$
- 22 if  $f'(x) = -\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$
- 7 if  $f'(x) = \frac{-3x^2+2}{(1-x)^2}$



- 17 -

The Domain of function  $f$  is  $A=\mathbb{R}-\{-1\}$ ;  
If yes, go to page 30,  
otherwise go to page 36.



- 18 -


Wrong! There is no horizontal asymptote, because

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 1}{1 - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{-1} = \mp\infty$$

The Caveman chased you for a long time.  
You lose time and energy.

You lose one energy point.  
Go to page 37.



- 19 -

The hits with the bat gave you some pretty good bumps! You lose a point of energy.

Wrong! Its whole denominator is square. So, the denominator is always positive on A.

You lose a point of energy. Go to page 11.

- 20 -

Right! There is a slant asymptote, the  $y=-x-2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{-2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 + x - 1}{x - x^2} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-x} = \frac{2}{-1} = -2$$

Took advantage of the echo of the cave and made the enemy loopy.

Go to page 40.

- 21 -

Big Snake guarded. You defended with brimstone that you had in your pouch.

$$f'(x) = \frac{(2x^2+1)(1-x) - (x^2+x-1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2} \text{ or } -\frac{x(x-2)}{(1-x)^2}$$

The next time you sssshall ssssee.

Go to page 9.

- 22 -

You should find the slant asymptotes of the function f. I remind you that  $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

- If there is at least one slant asymptote go to page 21,
- otherwise go to page 39.

- 23 -

Right! There are vertical asymptotes, because

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^2 + x - 1}{1 - x} = \mp\infty$$

The caveman went to grab you, but you beat him off with a burning torch! You did it again!

Go to page 23.

- 24 -

Ninja Osho was hidden behind the only bush in the area. You did not see him and he hit you. He almost gave you the final hit.

Wrong! Function f is continuous as rational.

You lose 1 point of energy. Go to page 17.

- 26 -

The table of monotonicity and extrema of f is:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	+	0
f(x)	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\nearrow$	-5

$l. min. (0;-1)$        $l. max. (2;-5)$

Go to next page.

- 26 -

$$f''(x) = \frac{-2}{(1-x)^3}$$

Go to next page.

- 27 -

The table of signs of f'' is:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''(x)	+		-

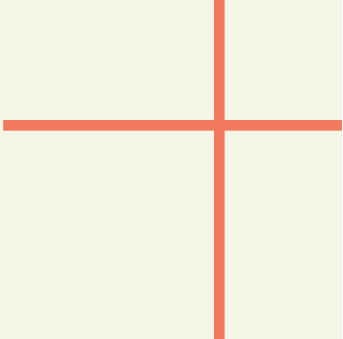
Add the line of concavity.

If the table of concavity is:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''(x)	+		-
f(x)			

- go to page 13,
- otherwise go to page 8.

- 28 -



Is the function continuous on its domain as polynomial? If yes, go to page 25, otherwise go to page 5.

- 29 -

You did not eat anything before the starting of the mission. You ate some strange blackberries that were toxic. You lose 2 points of energy!

The domain of the function is  $\mathbb{R}$ , except for the values of  $x$  that the denominator is zero. So, the domain is  $A = \mathbb{R} - \{1\}$ .

Go to page 29.

- 30 -

Yverne was trying to attack you, but you tricked the Gorilla with a banana.

Well done! The sign of  $f'$  is  $-|+|-$ .

Yum, yum!  
Go to page 33.

- 31 -

Wrong! There are vertical asymptotes, because

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^2 + x - 1}{1 - x} = \mp \infty$$

The caveman caught you. This time you were too slow.

You escaped, but you lose a energy point!  
Go to page 23.

- 32 -

The table of signs of  $f'$  is

$x$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-

Add to the table:

- the line of function's monotonicity and
- the extrema of  $f$ .

If  $f$  has a local minimum the -5 go to page 6, otherwise go to page 15.

- 33 -

Right! There is no horizontal asymptote, since

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-1} = \mp \infty$$

The Caveman chased you for a long time. You temporarily blinded him with a powerful flashlight! You did it again!

Go to page 37.

- 34 -

The hits with the bat gave you only one very small bump! That's way your friends used to call you a powerfull brain.

Right! Its whole denominator is square. So, the denominator is always positive on  $A$ .

Go to page 11.

- 35 -

You did not eat anything before the mission. You avoided some strange blackberries and picked apples for food.

Well done. The Domain is  $A = \mathbb{R} - \{1\}$ .

Go to page 29.

- 36 -

You should find the vertical asymptotes of the function  $f$ . I remind you that  $A = \mathbb{R} - \{1\}$ .

- If there is at least one vertical asymptote go to page 24,
- otherwise go to page 32.

- 37 -

Correctly! First of all, we are dealing with the Domain of the Function, which in this case is only depends on the denominator.

Well done! You were careful and you were avoided sign hit of the Gorilla.

You escaped this time!

Go to page 18.

- 38 -

Wrong! There is slant asymptote, that is  $y=-x-2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{-2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{x^2 + x - 1}{x - x^2} + x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

The enemy caught you because you tried to hide to his cave!

You lose an energy point.  
Go to page 40.

- 39 -

You've made it!  
The only thing left is to make the table of variations and to draw the graph of f.  
The table of variations is:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	+	0
f''(x)	+		+		-
f(x)		-1		-5	

$+\infty$   $y=-x-2$  *sl. asym.*    *l. min.* (0,-1)     $x=1$  *ver. asym.*     $x=2$  *l. max.* (2,-5)     $y=-x-2$  *sl. asym.*

Go to next page.

- 40 -

For the drawing of graph, first we must draw the asymptotes and find the points of intersection with the axes:

Go to next page.

- 41 -

Finally! The graph of function f is

Well done!  
Mission accomplished!

- 42 -

## UN ESEMPIO DAL PROGETTO "MATHSPACES", SOVVENZIONATO DA FONDI EUROPEI

Una grande percentuale di ragazzi comincia a studiare matematica pensando che sia difficile e ardua da comprendere. Per contrastare questa idea, è emerso negli ultimi 10-15 anni un movimento in tutta Europa con la creazione di musei, centri o case della matematica per promuovere un approccio non formale della matematica, che ha un effetto comprovato sulle abilità matematiche dei giovani e soprattutto sul loro coinvolgimento con la disciplina.

Comunque, gli spazi dedicati a questo approccio matematico sono ben pochi. Questa carenza è dovuta alla mancanza di conoscenza riguardo al tipo di approccio e alla difficoltà di reperire le risorse e i contenuti appropriati.

Per questo motivo i partner del progetto MathSpaces hanno deciso di ideare un progetto che punta ad aumentare la consapevolezza e la pratica di incrementare gli spazi dedicati all'approccio non formale per la matematica nell'Unione Europea. Per far ciò, i partner hanno voluto creare:

1. Un booklet sull'efficacia dell'approccio non formale per la matematica e una guida pratica sulla creazione di spazi dedicati all'approccio non formale per la matematica;
2. Un database di strumenti, giochi, attività disponibili in Opensource;
3. Le prime due mostre di matematica, scientificamente e pedagogicamente accurate, in Opensource, con progetti e tutorial.

Il booklet è disponibile in inglese sul sito web del progetto: <http://mathspaces.eu/>

Il leader del progetto MathReality, Fermat Science, ha partecipato allo sviluppo del progetto MathSpaces. Sebbene alcuni degli strumenti del progetto non siano ancora utilizzabili, a causa di alcune difficoltà, è possibile analizzarne altri già sviluppati come esempi di strumento non formale.

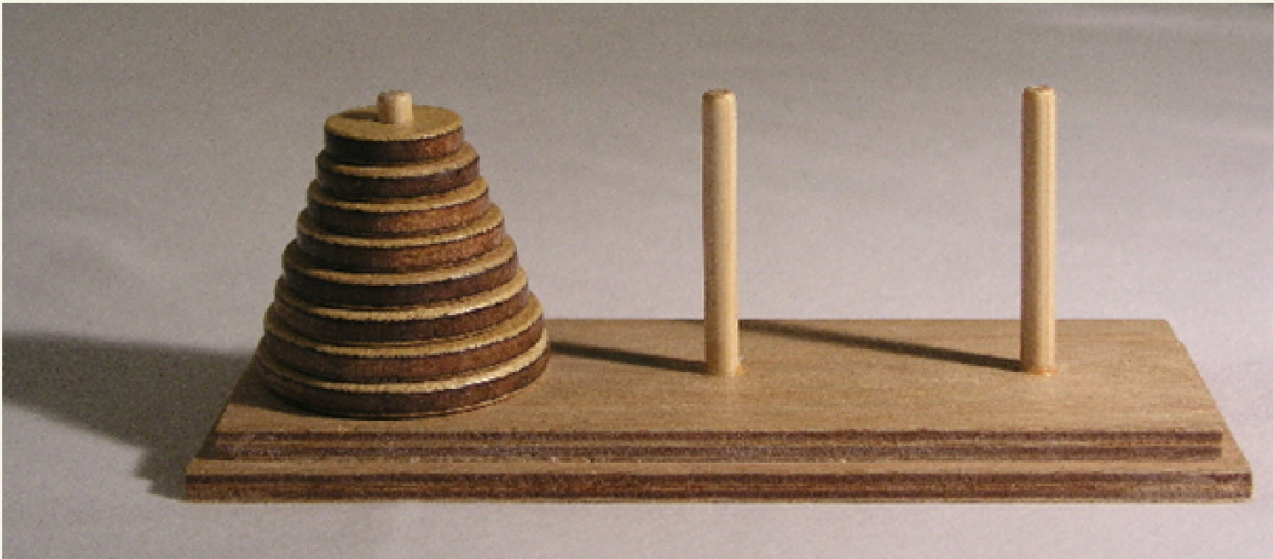




## Rompicapo e matematica

### La torre di Hanoi

Questo è un rompicapo inventato dal matematico francese Edouard Lucas (1842-1891), ideato nel 1883. Alcuni dischi di diversa misura sono impilati su una staffa in ordine decrescente, di modo che il più largo sia alla base e il più piccolo sia in cima.



Fonte: VR Lens Lab

Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Tower\\_of\\_Hanoi#/media/File:Tower\\_of\\_Hanoi.jpeg](https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi#/media/File:Tower_of_Hanoi.jpeg)

Scopo del gioco è muovere questa torre su una delle altre due staffe. Per farlo, puoi muovere solo un pezzo alla volta, senza mai mettere un disco più grande sopra uno più piccolo. Tutte e tre le staffe devono essere utilizzate.

### Quante mosse?

Il numero di mosse necessario per completare una Torre di Hanoi può essere calcolato utilizzando la formula  $2^n - 1$ . Dunque, due dischi hanno bisogno di 3 mosse, tre dischi di 7 ecc.

### Dimostrazione matematica

Si dimostra molto facilmente tramite induzione.

- Il risultato è vero per  $n = 1$ .
- Supponiamo che il risultato sia vero per  $n$  e mostriamo che è vero per  $n + 1$ :

Quindi, abbiamo  $2^n - 1$  mosse per  $n$  dischi.

Per un disco in più, perciò per  $n + 1$  dischi, serviranno  $(2^n - 1)$  mosse per spostare tutti i dischi tranne quello posizionato al fondo, 1 per spostare il disco più grande su un'altra staffa e altre  $(2^n - 1)$  mosse per spostare nuovamente gli  $n$  dischi sul disco più grande, per un totale di  $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1)$  mosse.

$(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2(2^n) - 1 = 2^{n+1} - 1$ , il che verifica l'ipotesi.

Infine, il risultato è vero per un disco; quando è vero per  $n$  dischi, è vero per  $n + 1$  dischi. La ricorrenza è ben dimostrata: per  $n$  dischi, servono  $2^n - 1$  mosse.

## Ancora più matematica

Il problema delle Torri di Hanoi è studiato in algoritmica (programmazione), dove offre un esempio del potenziale e della leggibilità di programmi definiti ricorsivamente (un altro esempio è l'ordinamento ad albero).

Le Torri di Hanoi possono essere anche rappresentate da un grafico astratto: ogni vertice del grafico rappresenta una possibile disposizione degli  $N$  dischi sulle tre torri, con uno spigolo che collega due vertici se c'è un movimento di un disco che permette il passaggio da una posizione, rappresentata da uno dei vertici, all'altra.



Fonte: Thomas Ricaud, Fermat Science

## La via più breve

Nel progetto MathSpaces, l'*intellectual output* n°5 è una mostra, esaustiva e scientificamente valida, in Open source per i ragazzi di età compresa tra i 9 e i 15 anni.

Per questa categoria di studenti, la matematica comincia ad essere più specifica: non è più tutta gioco e logica di base, ma non entra ancora nella parte teorica più "tecnica".

L'apprendimento in questa fascia d'età si concentra sulle teorie più importanti e su concetti base della moderna matematica.

Il tema scelto dal partner è "La via più breve". Scopo primario è introdurre i ragazzi ad alcuni "piccoli" problemi riscontrabili nella vita quotidiana.

*In uno spazio aperto, il tragitto più breve che collega due punti è una linea retta. Ma che succede se ci troviamo sulla superficie di una sfera? O se c'è un'aiuola nel mezzo con il cartello "Non calpestare l'aiuola"? O se dobbiamo collegare tre o più punti? Questa dimostrazione riguarda queste e altre situazioni simili.*

Di seguito, si possono trovare i moduli ancora in costruzione per il progetto MathSpaces:

## **Modulo 1 Geodetiche**

In geometria differenziale, una geodetica è una generalizzazione della nozione di "linea retta" negli "spazi curvi". Il termine "geodetica" deriva da "geodesìa", la scienza di misurare la grandezza e la forma della Terra; nel senso originale, una geodetica è il tragitto più breve tra due punti sulla superficie terrestre, vale a dire un segmento di una grande circonferenza. Il termine è stato generalizzato per includere misurazioni molti altri spazi matematici generali; per esempio, nella teoria dei grafi, si potrebbe considerare una geodetica il percorso tra due vertici/nodi di un grafo.

### **Cosa?**

Possiamo mettere gli studenti di fronte a un mappamondo, sul quale il visitatore può sperimentare la via più breve tra diverse città. Ma possiamo anche utilizzare il programma Mappa Mundi, (<https://mappaemundi.campus.ciencias.ulisboa.pt>) che mostra mappe della Terra in diverse proiezioni, sulle quali è possibile disegnare geodetici tra due punti qualsiasi.

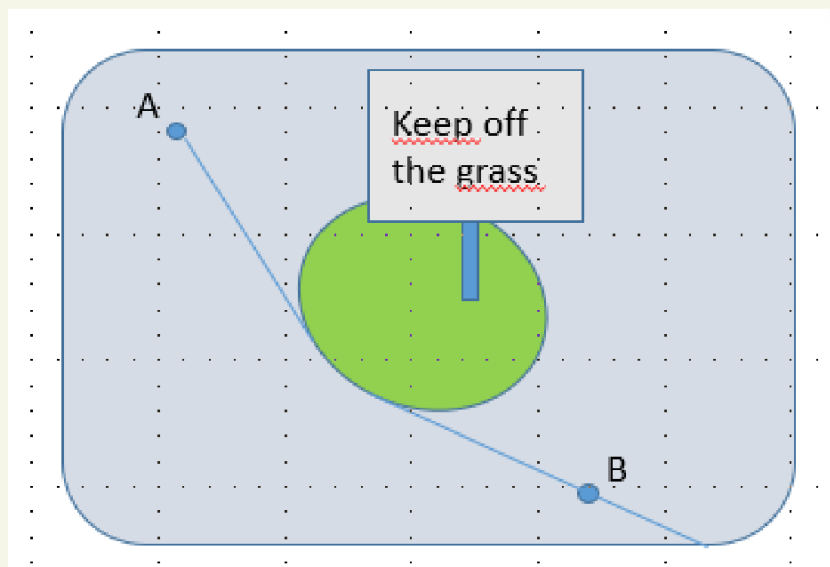


## Modulo 2 Una piazza con un'aiuola

Il miglior percorso è tangente all'aiuola.

### Cosa?

Un metro a nastro fissato nel punto A misura il percorso tra A e B.



Fonte: Alessandra Masala, Giardino di Archimede

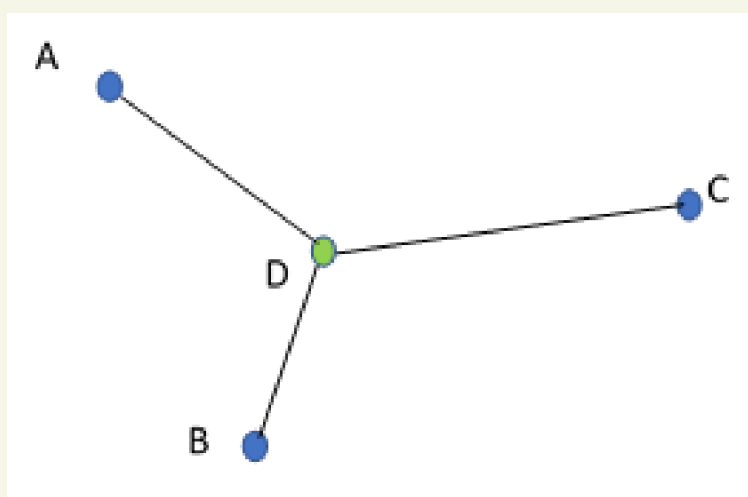
## Modulo 3 Connettere città

Come connettere tre città attraverso un reticolato di strade più corto possibile?

Date tre città A, B e C, trovare un punto D tale che la somma delle tre distanze  $AD+BD+CD$  sia la più piccola in assoluto.

### Cosa?

Due fogli di acrilico posizionati parallelamente sono uniti da piccoli tubi. L'oggetto è immerso in una soluzione di sapone e il risultato è mostrato qui di seguito.



Fonte: Alessandra Masala, Giardino di Archimede

## FALLO DA SOLO – CREA IL TUO STRUMENTO PER L'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA NON FORMALE PERSONALIZZATO

Un attento lettore avrà sicuramente notato che le informazioni dell'esempio della precedente sezione sono state fornite in un ordine logico, per facilitare sia la realizzazione pratica dello strumento che l'acquisizione di nuove conoscenze. Per questo motivo si è deciso di ricostruire e riorganizzare tutti e tre gli esempi seguendo sottosezioni predeterminate (titoli), con passi più chiari e sezioni come già specificato in precedenza. Questo modo di strutturare l'informazione attraverso i summenzionati titoli potrebbe risultare particolarmente utile per l'educatore che vuole creare il proprio strumento per l'apprendimento della matematica non formale.

Questo paragrafo, quindi, darà alcuni dettagli in più sul processo da seguire per realizzare il proprio strumento.

### **Passo 1: selezionare i destinatari**

Innanzitutto, il creatore di uno strumento per l'apprendimento della matematica non formale dovrebbe decidere a quale destinatario indirizzarlo. Con il termine *destinatario* sottintendiamo la fascia d'età per la quale lo strumento è ideato, sempre collegandolo sia agli obiettivi educativi che al curriculum in uso nella scuola. In altri termini, dobbiamo sempre assicurarci che il materiale che vogliamo creare per un destinatario di una certa fascia di età sia compatibile con il curriculum scolastico del proprio sistema educativo.

### **Passo 2: Selezionare un concetto matematico con cui lo strumento ha a che fare**

Il secondo passaggio per il creatore di un nuovo strumento per l'apprendimento della matematica non formale è decidere su quale concetto matematico vuole lavorare. Sarebbe bene sceglierne uno che sia adeguato per il destinatario selezionato nel passo precedente e decidere fino a che punto inoltrarsi all'interno dello specifico concetto. Inoltre, è da tenere in considerazione se il concetto sarà collegato ad altri concetti ad esso correlati. Bisogna fare attenzione anche che tutti questi concetti siano stati già spiegati ai destinatari, valutando anche la necessità di ripassarli.

### **Passo 3: Selezionare lo scopo generale – gli obiettivi del tuo strumento**

Come già detto in precedenza, uno strumento deve essere capace di trasformare obiettivi educativi in pratica. Perché lo strumento abbia successo, quindi, gli obiettivi educativi scelti devono poter essere realisticamente trasformabili in pratica e chiaramente definiti nella loro descrizione e formulazione. Sia il creatore che i fruitori dello strumento, perciò, devono aver ben chiaro in mente quale sarà l'esatto risultato atteso al termine dell'esercizio.

#### Passo 4: Scegliere una durata

Il creatore dovrebbe decidere sin dalla fase iniziale per quanto tempo utilizzare lo strumento, in modo tale da creare un ragionevole numero di compiti da fargli svolgere. Ricordate che uno strumento efficace non stima in eccesso né in difetto il parametro della “durata”. Inoltre, poiché una delle caratteristiche peculiari dello strumento è la *trasferibilità*, in alcuni casi potrebbe essere meglio indicare un arco temporale, come quando, per esempio, lo strumento ha al suo interno un gioco.

#### Passo 5: Scegliere Media e Tecniche

Nel sottocapitolo intitolato “Aiuto all’insegnamento; Media e Tecniche”, un docente può ritrovare la tabella proposta e selezionare i media e le tecniche (o anche un oggetto dalla terza colonna, che indica una combinazione di Media e tecniche). La vostra scelta dipenderà inevitabilmente da almeno quattro parametri:

- 1) il materiale e le risorse educative di cui disponi. Nel caso non ne siate provvisti, potete cercarli sulla rete, pensare a qualcosa di totalmente nuovo o consultare libri e bibliografia accademica specializzata sull’argomento. Comunque sia, potreste usare il materiale già esistente che viene fornito con progetti STEM già esistenti e modificarli in modo tale da soddisfare le vostre necessità e i vostri bisogni, seguendo le istruzioni fornite in questo paragrafo;

Dovete anche necessariamente considerare:

- 2) l’ambiente sociale / il contesto educativo nel quale lo strumento sarà utilizzato;
- 3) le infrastrutture educative (sale computer, spazi aperti, equipaggiamento) e il potenziale accesso a nuove tecnologie e alla rete;
- 4) ciò che è più utile per il concetto matematico scelto, il gruppo classe e per raggiungere i vostri obiettivi fondamentali. In ogni caso, il vostro strumento può incorporare una combinazione di diversi tipi di apprendimento non formale.

#### Passo 6: Scrivere le istruzioni

Durante la redazione delle istruzioni, ricordate che uno strumento per l’apprendimento dovrebbe costituire un processo educativo completo, di modo tale da poter *stare in piedi da solo*. Perciò, mentre si scrivono le istruzioni di uno strumento, assicuratevi che seguano un ordine logico, per evitare ogni possibile *lacuna cognitiva* durante il processo educativo; questo implica che il creatore dovrebbe aver costruito lo strumento a partire dalle fondamenta del concetto matematico concreto, fino a giungere agli elementi più complessi che la specifica nozione potrebbe contenere.

Ancor più importante, ricordate che uno strumento deve essere descritto in un ben preciso linguaggio, in modo tale da poter veicolare il messaggio in modo chiaro e comprensibile.

## **Passo 7: Scrivere i risultati attesi e le competenze**

In questo passo, si chiede al creatore di scrivere qualcosa di simile al contenuto del passo 2. Per esempio, se lo scopo generale/obiettivo dello strumento specifico fosse “gli studenti devono imparare a effettuare semplici e rapidi calcoli, basati sulle nozioni di somma, sottrazione e moltiplicazione”, il risultato atteso dovrebbe essere qui descritto come “al termine dell’attività, gli studenti dovrebbero aver familiarizzato con i processi di addizione/sottrazione e/o moltiplicazione, essendo altresì capaci di effettuare semplici operazioni matematiche in modo rapido e accurato”.

## **Passo 8: Pensare un metodo di esposizione e domande per la valutazione del processo**

Per rendere completa l’intera metodologia, è bene incorporare una sezione Esposizione, accompagnata da alcune domande per la valutazione, sia per l’educatore che per i gruppi, in modo tale da valutare il processo educativo in sé. Alcuni esempi di domande per la valutazione dello strumento dal punto di vista dell’educatore sono riportate di seguito:

Quali abilità hanno acquisito i destinatari con questo strumento? Come applicare le abilità acquisite dai destinatari durante il processo educativo? Quali difficoltà hai affrontato durante l’utilizzo dello strumento specifico, sia per quanto riguarda i destinatari che il processo educativo? In che modo gli obiettivi del programma coincidono con i tuoi bisogni? Quali pratiche utilizzate finora saranno abbandonate in virtù dei risultati conseguiti tramite lo strumento? Quali nuove pratiche implementerai grazie all’utilizzo dello strumento? Quale è stato il risultato/l’impatto della partecipazione dei destinatari in termini di (i) interesse mostrato per lo specifico processo educativo; (ii) coinvolgimento con i concetti matematici incorporati; (iii) obiettivi supplementari indicati dall’educatore.

## **Passo 9: Scegli il titolo**

Sebbene il titolo sia la prima cosa in cui ci si imbatte quando leggiamo la descrizione di un nuovo strumento per l’apprendimento, il creatore ha la decisione finale su quale dovrebbe essere il titolo dello strumento, subito dopo aver completato l’intero processo di progettazione e creazione. In ogni caso, cercate di scegliere un titolo ammiccante, attraente e fantasioso!

## MATEMATICA E DISTURBI DELL'APPRENDIMENTO

La matematica è una materia molto concreta e precisa. Se chiedete a un bambino quale sia il risultato di  $7 + 3$ , la risposta non può essere approssimativa, ma dev'essere precisa, perché la risposta sia considerata giusta. Può essere giusta o sbagliata. Di solito, i ragazzi non prendono punti se danno una risposta quasi corretta. Per questo motivo, più di ogni altra materia, la matematica provoca ansia, a causa della paura di sbagliare e di essere valutato negativamente.

Dal momento che si tratta di una *materia cumulativa* (Brian Butterworth), la conoscenza avviene tramite nuove informazioni che si basano e si collegano alle precedenti. Se mancano alcuni contenuti, quello successivo è meno comprensibile. Fare continui progressi nell'apprendimento della matematica è un processo particolarmente impegnativo per chi soffre di un Disturbo Specifico dell'Apprendimento.

I DSA (Disturbi Specifici dell'Apprendimento) sono disturbi che non sono causati da disabilità visive, uditive o motorie e neanche da ritardi mentali, disturbi emotivi o da svantaggi ambientali, culturali o economici. Possono rendere difficoltoso lo sviluppo cognitivo di una o più abilità come parlare, leggere, scrivere, effettuare calcoli, pianificare e coordinare compiti motori.

### I DSA NON SONO CAUSATI DA:

- Disabilità fisiche;
- disabilità mentali o ritardi dello sviluppo;
- problemi psicologici o sensoriali;
- fattori socio-culturali.

### UNA LISTA DEI DSA:

- Dislessia – difficoltà nel leggere e fare lo spelling;
- disgrafia – difficoltà nella scrittura a mano e di alcune abilità basate sulla motricità fine;
- discalculia – difficoltà nell'aritmetica e nella matematica;
- disfasia – difficoltà a produrre e comprendere il linguaggio parlato.

### INOLTRE:

- Disprassia – difficoltà con la motricità fine e grossolana, classificata come Disturbo della coordinazione motoria e non come disturbo specifico per l'apprendimento, ma influenza il processo di apprendimento degli studenti.



Anche se molti discenti soffrono di DSA, non è ancora del tutto stimato il numero preciso. La European Dyslexia Association stima che il 5-12% della popolazione sia affetta da almeno un DSA.

Abbiamo già detto che per molte persone (inclusi docenti, educatori e dirigenti) la matematica è una materia complicata che può essere insegnata solo in modo formale. Molti di noi hanno incontrato difficoltà con la regina della scienza e dell'argomentazione di molti concetti astratti, ma per gli studenti affetti da DSA alcuni compiti sono davvero difficili da portare a termine.

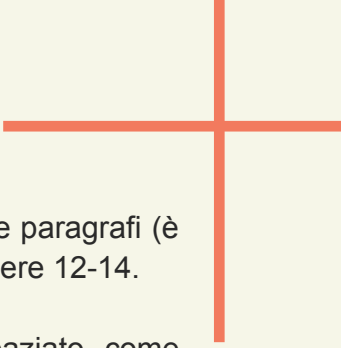
### LE PIÙ GRANDI SFIDE IN MATEMATICA PER GLI ALUNNI DSA:

- Comprendere il senso dei numeri e come funzionino;
- comprendere i simboli e ricordare il lessico specifico;
- comprendere le forme: simmetria, dimensione relativa, la loro quantità e come manipolarle;
- debole memoria e lungo e breve termine, necessaria ad automatizzare le procedure matematiche in analisi;
- usare strumenti per il disegno, nel caso la motricità fine sia difficoltosa;
- difficoltà di lettura e organizzazione rendono più difficoltosa la risoluzione di problemi e compiti complessi
- ricordare le tabelline, il che richiede vari tipi di approcci per trovare il più adatto.

Rendere la matematica più *DSAmica* è possibile innanzitutto attraverso la comunicazione con gli studenti: conoscere i loro interessi, quale sia il loro approccio ai compiti e cosa li scoraggi durante il processo di apprendimento.

### ALCUNI CONSIGLI PER INSEGNANTI CHE POTREBBERO ESSERE DI BENEFICIO A TUTTI GLI STUDENTI DSA:

- usare oggetti reali, che possano essere manipolati, per spiegare geometria;
- consigliare agli studenti di leggere i problemi a voce alta e aiutarli a suddividere i compiti in passi più piccoli;
- iniziare la lezione con uno schema di cosa si imparerà e terminarla con un breve riepilogo delle informazioni più importanti;
- potenziare la comprensione, spiegando il lessico specifico ricorrente e i simboli per creare un dizionario matematico;
- minimizzare quanto più possibile l'aspetto astratto, collegando i compiti affidati a esempi e alla loro applicabilità nella vita reale.

- 
- usare libri e fotocopie con caratteri grandi e molto spazio tra linee e paragrafi (è preferibile un'interlinea di 1.5). La dimensione dei font dovrebbe essere 12-14.
  - Si raccomanda l'uso di un font sans serif chiaro, possibilmente spaziato, come Arial o Comic Sans. Altri: Verdana, Tahoma, Century Gothic e Trebuchet. Ricordate che una dimensione non va bene per tutti e che dovrete testarla con gli studenti per verificare quale sia migliore per loro.

L'uso della tecnologia VR offre grandi opportunità a potenziare le abilità visuali essenziali per l'apprendimento della matematica. L'algebra si basa su un sistema compreso di simboli scritti con un lessico specifico e richiede di automatizzare compiti di calcolo, mentre la geometria si basa sulla comprensione di forma, simmetria, dimensione relativa e quantità, su come manipolarle e come disegnarle precisamente su carta.

# INTEGRARE LA TECNOLOGIA VR CON L'APPROCCIO NON FORMALE NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

## INNOVAZIONI TECNOLOGICHE MODERNE CORRENTEMENTE IN USO PER INSEGNARE LA MATEMATICA NON FORMALE

L'Organizzazione delle Nazioni Unite per l'Educazione, la Scienza e la Cultura (UNESCO), un'agenzia delle Nazioni Unite, ha spinto per inserire le TIC (Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione) nell'istruzione, come parte del suo sforzo per promuovere l'equità e l'accesso all'istruzione. Quanto segue, tratto direttamente da una pubblicazione UNESCO sulle TIC nell'istruzione, spiega la posizione dell'organizzazione sull'iniziativa.

L'UNESCO adotta un approccio olistico e globale nel promuovere le TIC nell'istruzione. L'accesso, l'inclusione e la qualità sono le principali sfide a cui possono dare una risposta positiva. La Piattaforma Intersezionale dell'Organizzazione per le TIC nell'istruzione concentra i suoi sforzi attraverso il lavoro congiunto di tre settori: Comunicazione e Informazione, Istruzione e Scienza.

In Europa, le TIC sono state integrate e incoraggiate nelle scuole già da qualche anno. Esse promuovono l'educazione non formale, soprattutto per quanto riguarda la matematica.

### SCHERMI IN CLASSE: COMPUTER, TABLET, SMARTPHONE O LIM

Gli schermi, in generale, sono parte dell'ambiente familiare agli studenti; sono un elemento rassicurante che fornisce fiducia e incoraggiamento a prendere l'iniziativa. Gli studenti si relazionano ad essi con una partecipazione attiva e motivata. Prendiamo l'esempio della LIM..



Una LIM (lavagna interattiva multimediale) è connessa a un computer e a un videoproiettore. L'interazione avviene tramite una penna elettronica o semplicemente tramite il contatto, con cui lo schermo trasmette l'informazione al computer. Esistono vari software e accessori per vedere e manipolare le nozioni di vari campi di studio.

Alcuni dei vantaggi nell'usare una LIM sono:

- Dare una possibilità al docente di registrare la lezione, specialmente i passaggi più complessi, e di condividerla con gli studenti, in modo tale che possano ritornarci su quando necessario;
- promuovere la partecipazione dello studente e l'interattività in classe;
- potenziare la motivazione. Grazie al proprio lato divertente, moderno e nuovo (all'inizio), aiuta i giovani a mantenere alti l'interesse e l'attenzione, particolarmente importante per studenti con ADHD (disturbo da deficit di attenzione/iperattività);
- permette di rappresentare alcune entità astratte (per esempio in geometria), facilitando e consolidando l'acquisizione di concetti matematici.

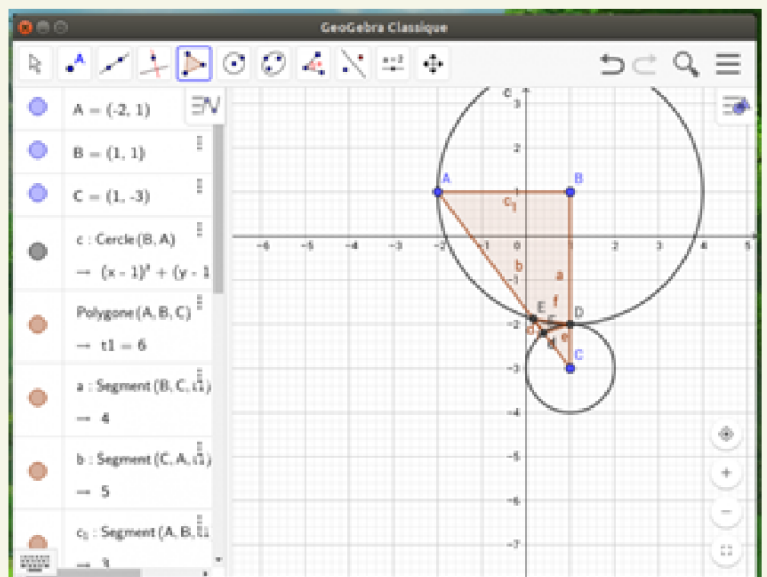
## SOFTWARE E APP CHE FACILITANO L'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA

Oggi ci sono molti software educativi gratuiti utili per comprendere la matematica in modo non formale. Si ritiene che, attivando le conoscenze per risolvere i problemi proposti, gli studenti consolideranno le proprie abilità e capacità intellettive. La pratica del gioco fa risparmiare tempo nell'apprendimento, assicura lo sviluppo di abilità matematiche più durature e permette agli studenti di sviluppare diverse strategie.

La tecnologia in sé non è soltanto più *divertente* della semplice tecnica carta e penna, ma il contenuto del software permetterà agli studenti di riesaminare i concetti da un punto di vista differente.

### Alcuni esempi

**GeoGebra** è un software matematico dinamico per tutti i gradi di istruzione, che combina la geometria, l'algebra, il foglio di calcolo, i grafici, la statistica e l'analisi infinitesimale in un unico software semplice da usare.



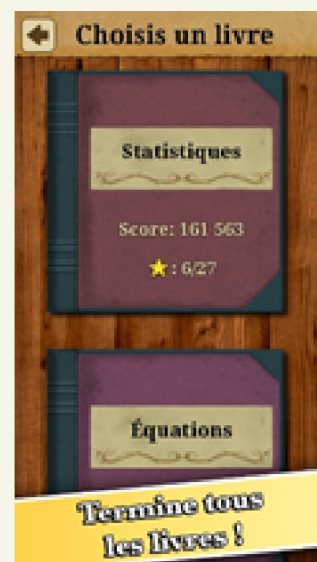
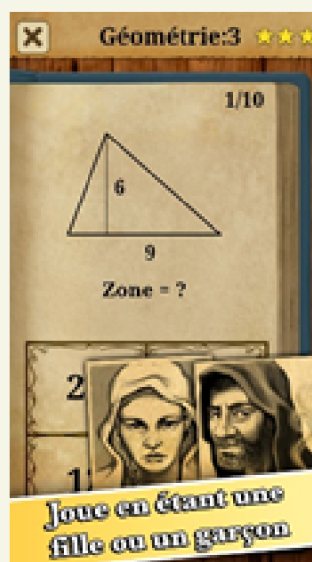
Fonte: screenshot tratto da [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).

**Scratch** è un software di programmazione visuale. Questo tipo di programmazione ha il vantaggio di eliminare i possibili errori di sintassi, ma resta comunque un linguaggio di programmazione potente, che rende possibile utilizzare tutti i concetti dell'algorithmica come le variabili, le iterazioni (loops), le istruzioni condizionali, i sottoprogrammi ecc.



Fonte: screenshots from <https://scratch.mit.edu/>

**Le Roi des Maths** è un divertente gioco matematico. Vestendo i panni di un contadino, create il vostro personaggio e rispondete a domande sulla matematica, migliorando il punteggio totale.



Fonte: screenshots from <http://www.jeux.org/jeu/le-roi-des-maths.html>

## L'UTILIZZO DI INTERNET E DEI SOCIAL NETWORK PER AVVICINARSI A NUOVI CONCETTI

Internet offre diversi strumenti per supportare l'insegnante di matematica, che permettono di diversificare il modo di insegnare contenuti e allo stesso tempo di moltiplicare le possibilità di apprendimento e acquisizione delle informazioni.

## ***Alcuni esempi***

### Usare tragitti matematici in città: **MathCityMap**

MathCityMap fornisce ai docenti un software che facilita la creazione di percorsi per far matematica. Un'applicazione scaricabile permette agli studenti di geolocalizzare enigmi e di rispondere a domande durante il corso. La verifica istantanea delle loro risposte permette loro di ricominciare da capo o continuare il viaggio. Gli enigmi proposti spesso riguardano la dimensione (lunghezza, area, volume), ma è possibile utilizzare anche altri campi.

### Uso del supporto video (YouTube) per i corsi: **Videos Scientificiz (French)**

Su internet (più precisamente su YouTube) ci sono molti video che spiegano la matematica in modo non formale. In Francia c'è un esempio di un progetto scolastico: il canale YouTube Scientificiz.



Fonte: [https://www.youtube.com/channel/UCIUbSRKVVOpWI\\_xB3soLU1g/](https://www.youtube.com/channel/UCIUbSRKVVOpWI_xB3soLU1g/)

Nei video, ideati e filmati dagli studenti, si parla di matematica e magia, codici segreti, matematici come Fermat e Pitagora...

Altri youtubers che rendono popolare concetti matematici possono completare il corso tradizionale:

NUMBERPHILE <https://www.youtube.com/user/numberphile>

MICMATHS (FRENCH) <https://www.youtube.com/user/Micmaths>

Condividere foto via Twitter attraverso l'hashtag: **#mathsenvie**

## UN NUOVO APPROCCIO MODERNO: REALTÀ AUMENTATA

Studenti dal sud della Francia si sono riuniti nel 2018 per lavorare alla progettazione degli Giochi matematici Jumathsji. Hanno creato un poster del gioco che utilizza la realtà aumentata: questo poster, che può essere diffuso online o visualizzato ovunque, è capace di parlare, di scoprire attraverso uno smartphone una dimostrazione del gioco, di far leggere o ascoltare una breve biografia di cinque matematici (Ipazia di Alessandria, Maria Agnesi, Euclide, Ipparco e infine Cédric Villani). Le domande riguardano diversi campi della matematica e sono scritte da studenti.



Fonte: Pierre Henry, Casarotto Collège de Bazas

Come funziona? Scansionando il QR CODE presente sul poster dell'analisi, della geometria e dei problemi si dà inizio al gioco: la valle dei numeri, la pianura del 2D, gli spazi del 3D, una montagna del problema, addirittura una parte dedicata alla Matematica inglese.

## NUOVE PROSPETTIVE E POSSIBILITÀ CHE LA TECNOLOGIA VR POTREBBE SUGGERIRE PER LEZIONI DI MATEMATICA NON FORMALE

La tecnologia VR può essere molto utile all'apprendimento della matematica. Di fatto, come è stato analizzato nel Capitolo 1, l'approccio non formale è benefico per l'istruzione del discente in generale, ma in particolare per il campo matematico.

### Un approccio differente alla matematica

I docenti spesso usano foto o video per introdurre un nuovo concetto con un approccio non formale. Gli studenti osservano questi elementi, ma molto spesso si trovano a essere passivi. D'altro canto, la VR permette agli studenti di navigare direttamente all'interno della lezione! Alcuni esempi che cambiano il modo di proporre lezioni di matematica sono:

In geometria, i docenti usano la *caccia alle forme* per dare un po' di vita alla disciplina: gli studenti devono trovare tutte le forme geometriche nel loro ambiente. Spesso le forme riscontrabili sono poco numerose: con la VR, gli studenti possono viaggiare attraverso il mondo alla ricerca di forme o passeggiare in un mondo geometrico virtuale.

Per lavorare con la logica matematica, le Escape Room si stanno sviluppando sempre più all'interno delle classi, ma la loro installazione, la preparazione dell'arredamento e dell'atmosfera rimangono sempre questioni delicate. Immaginate puzzle in VR sullo stile di una Escape Room. Gli studenti sarebbero molto più motivati e la scelta degli enigmi è enorme.

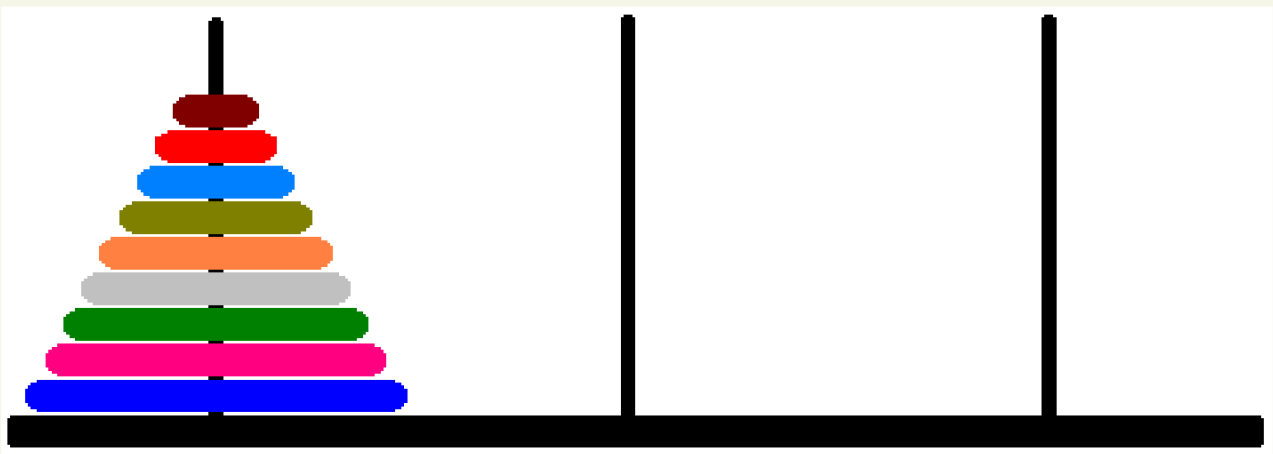
Nel risolvere un problema matematico, gli studenti spesso sanno come calcolare, ma hanno difficoltà nel capire come trovare il risultato o quale operazione utilizzare. Spesso ciò è attribuito alla mancanza di un lessico matematico. Sperimentando il problema in VR, lo studente può comprenderlo meglio. Per esempio, quando il problema tratta di volume dell'acqua, vasche da riempire o problemi simili, lo studente può testare in VR come riempire i contenitori e trovare la soluzione attraverso la manipolazione; cosa impossibile per molti problemi.

### Puzzle della Torre di Hanoi

Come già visto nel Capitolo 1, la Torre di Hanoi è un puzzle matematico che permette di approcciare concetti matematici in modo non formale. Questo puzzle può motivare gli studenti a lavorare su tali nozioni matematiche, ma spesso rimangono *bloccati* nella risoluzione manuale. Infatti, quando il numero di dischi è alto, serve molta concentrazione per risolverlo.

Immaginate questo puzzle in VR! Gli studenti possono sperimentare, come nella vita reale, ma potrebbero fare molto altro, come ad esempio:

- Chiedere aiuto e ottenere indizi;
- Vedere nozioni matematiche che appaiono direttamente di fronte a loro;
- cambiare il colore dei dischi per comprendere meglio;
- ascoltare la storia di questo puzzle.



Fonte: [www.france-ioi.org](http://www.france-ioi.org)



## ASPETTI PEDAGOGICI DELLA TECNOLOGIA VR

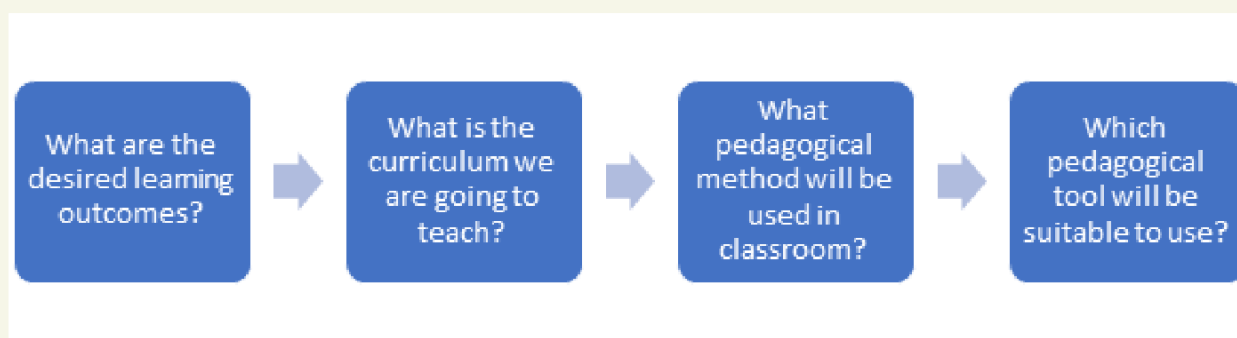
### COSA RENDE LA VR UNO STRUMENTO PEDAGOGICO PER LA MATEMATICA: PROPRIETÀ E CRITERI

Negli anni passati abbiamo tutti assistito ad alcuni interessanti cambiamenti negli strumenti utilizzati dai docenti nelle classi, per raggiungere gli obiettivi pedagogici della disciplina insegnata. Motivati da ampia documentazione circa la maggior efficacia dell'apprendimento attivo rispetto alla lezione tradizionale per quanto riguarda l'insegnamento delle discipline STEM [1], molti docenti cercano vie differenti per modificare le proprie lezioni in classe, nel tentativo di stimolare l'apprendimento attivo.

Questa trasformazione è apprezzabile dalla continua crescita dell'industria EdTech. Nel mondo, tra il 1997 e il 2017 sono stati investiti oltre 37.8 miliardi di dollari nelle aziende che si occupano di tecnologia applicata all'istruzione e un impressionante 62% di questa cifra è stata investita solo negli ultimi tre anni, dal 2015 al 2017[2].

Una buona programmazione pedagogica, tradizionale o digitale, dovrebbe far combaciare il programma, i metodi di insegnamento, l'ambiente di apprendimento e le procedure di valutazione che adottiamo (Biggs, 1999). Innanzitutto, il ruolo dei docenti come esperti progettisti dell'apprendimento (Laurillard, 2013; Selwyn, 2016) è quello di stabilire compiti di apprendimento, preparare un ambiente che supporti e faciliti l'apprendimento e favorire forme di relazione sociale all'interno della classe.

Per seguire questa strada, le domande riportate qui di seguito potrebbero essere utili:



[1] Freeman, S, Eddy, SL, McDonough, M, Smith, MK, Okoroafor, N, Jordt, H, Wenderoth, MP. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. Proceedings of the National Academy of Sciences, 111(23), 8410–8415.

[2] Metaari Research Report: The 2017 Global Learning Technology Investment Patterns

## Quindi quali criteri dovrebbe soddisfare lo strumento VR per essere definito pedagogico?

Nel 2002, la Partnership for 21st century skills, un'alleanza tra la comunità economica, i responsabili dell'istruzione e i politici, ha creato il Framework for 21st century learning. Questo framework presenta una visione olistica per quanto riguarda l'insegnamento moderno e le pratiche d'apprendimento. Nel contesto dell'istruzione delle conoscenze di base, gli studenti dovrebbero apprendere attraverso le 4 C. Queste competenze sono considerate essenziali per far crescere gli studenti sul lavoro e nella vita.

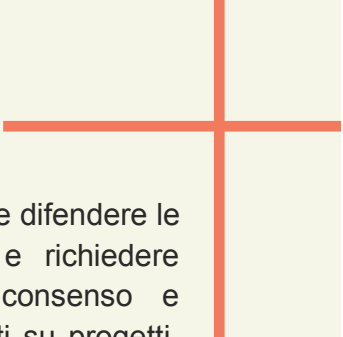


I principi delle 4C per le abilità del XXI secolo

Gli strumenti digitali possono favorire lo sviluppo di queste abilità negli studenti e, dal momento che si crede che la Realtà Virtuale abbia grandi potenzialità nell'apprendimento attraverso l'esperienza, proveremo a valutarne l'effettiva validità pedagogica attraverso i principi delle 4C:

**Il pensiero critico** si riferisce alle abilità degli studenti di analizzare, interpretare, valutare, prendere decisioni e risolvere problemi. Può essere sviluppato in classe attraverso domande guidate e progetti o con l'apprendimento basato sui problemi. Perciò, ad esempio, durante la lezione sull'ampiezza degli angoli, gli studenti potrebbero utilizzare lo strumento VR per analizzare diversi angoli di edifici mentre *visitano* la città di Firenze, comparando l'uso della matematica in architettura nel passato e nel presente.

**La comunicazione chiara** si concentra sull'esprimere con chiarezza pensieri e opinioni ad altre persone. Un apprendimento più profondo normalmente include la condivisione di ciò che si è appreso e l'interazione con gli altri in una comunità. Leadbeater (2008) pone l'accento sul fatto che "l'apprendimento migliore è quello svolto con le persone, invece che quello svolto per loro. È più efficace quando i discenti partecipano invece che essere esclusivamente i destinatari". Perciò, le attività in classe che utilizzano uno strumento VR dovrebbero basarsi su lezioni realistiche e coinvolgenti, con elementi di comunicazione attiva fra gli studenti.



**L'apprendimento collaborativo innovativo** chiede agli studenti di esprimere e difendere le proprie posizioni, scambiarsi diversi punti di vista, interrogare gli altri e richiedere chiarimenti. Serve rispetto reciproco, compromesso, costruzione del consenso e responsabilità condivisa. Può essere svolto in gruppi di apprendimento basati su progetti, dove, attraverso la comparazione di risultati, i compagni possono considerare nuovi utilizzi per la conoscenza e possono sviluppare nuove idee per applicazioni future. Ad esempio, le lezioni che utilizzano strumenti VR possono essere svolte in coppie o in piccoli gruppi.

**La creatività** include abilità come il brainstorming, la ridefinizione di idee, essere reattivo alle idee altrui, concretizzandole e rendendole utili agli altri. La conoscenza non è statica, ma permette un mix di apprendimento e pratiche di apprendimento basato su progetti relativi a sfide del mondo reale, che possono spingere gli studenti a essere partecipanti attivi nel processo di apprendimento. Per esempio, una classe potrebbe lavorare tramite brainstorming per comprendere la probabilità matematica che si verifichi un evento per affrontare problemi ambientali mentre guardano un video a 360° sull'impatto dei combustibili fossili sul pianeta.

Potete vedere da questi esempi che la Realtà Virtuale, se usata in modo strategico, può davvero migliorare il modo in cui i discenti possono utilizzare la conoscenza acquisita in classe ai problemi del mondo reale e il modo in cui essi prendono parte a progetti che richiedono un coinvolgimento continuativo e la collaborazione (Barron e Darling-Hannibd 2008).

## **CONCLUSIONI/RISULTATI SUL LIVELLO DI UTILIZZO E RISULTATI ACCADEMICI OTTENUTI DALL'USO DI STRUMENTI VR PER LA MATEMATICA NEI CONTESTI EDUCATIVI FORMALI E NON FORMALI**

Nei precedenti capitoli abbiamo visto come alcune novità tecnologiche siano particolarmente rilevanti per l'istruzione: la Realtà Virtuale (VR) si sta facendo strada tra le principali novità, dal momento che l'hardware sta diventando sempre più accessibile per le realtà scolastiche. In questa sezione, sono discussi alcuni studi che mostrano l'impatto della VR nell'istruzione:

### *Esplorare l'uso della tecnologica VR in matematica*

Nel 2017 una scuola nella contea di Hedmark (Norvegia) ha portato avanti uno studio pilota di 6 settimane, che ha coinvolto quattro diverse classi del 3° e 4° grado (34 studenti hanno formato il gruppo sperimentale) in matematica, concentrandosi sulla moltiplicazione.

Lo scopo dello studio era di capire se le abilità matematiche di base degli studenti sarebbero aumentate attraverso l'uso della Realtà Virtuale durante l'attività di apprendimento.

Il percorso è stato monitorato dal Practice-based Education Research Center (SEPU) dell'Innlandet University College. Gli studenti hanno preso parte a un test di mappatura delle competenze matematiche possedute prima e dopo il progetto.

Una classe di matematica di 5° grado di una scuola differente (31 studenti hanno formato il gruppo di controllo) che non ha usato la tecnologia VR ha preso parte agli stessi test di mappatura per un confronto.

Durante un periodo di 6 settimane, come parte di due lezioni, gli studenti hanno usato l'hardware Oculus GearVR e hanno lavorato su compiti che avevano a che fare con operazioni aritmetiche di base. L'esperienza è stata ludicizzata, dal momento che avrebbero vinto punti per le risposte corrette. Ai docenti è stata fornita una piattaforma a cui collegarsi e con cui tener traccia dei progressi di ogni studente. Questo ha permesso di collezionare dati sui progressi di ogni studente nel tempo, invece della semplice valutazione. I creatori della VR Education credono che considerare lo studente come qualcuno in evoluzione non sia importante soltanto al fine di valutare la loro *performance*, ma anche per l'istruzione del futuro.

School	Gender	N	Total Cohen's d	Effect Cohen's d
Control group/school	Boys	13	.04	
	Girls	18	.27	
Intervention group/school (VR)	Boys	12	.53	0,49
	Girls	23	.23	-0,04

Fonte: [www.vreducation.no/pdf/vr-maths-report-NO.pdf](http://www.vreducation.no/pdf/vr-maths-report-NO.pdf)

Questa tabella confronta lo sviluppo di ragazzi e ragazze di entrambi i gruppi. Un'ampiezza dell'effetto di 0.49 in sei settimane è considerato un miglioramento sostanziale. D'altro canto le ragazze non hanno mostrato particolari miglioramenti. Durante i test hanno dichiarato di provare nausea nell'utilizzo degli occhiali VR, perciò li hanno usati meno dei ragazzi.

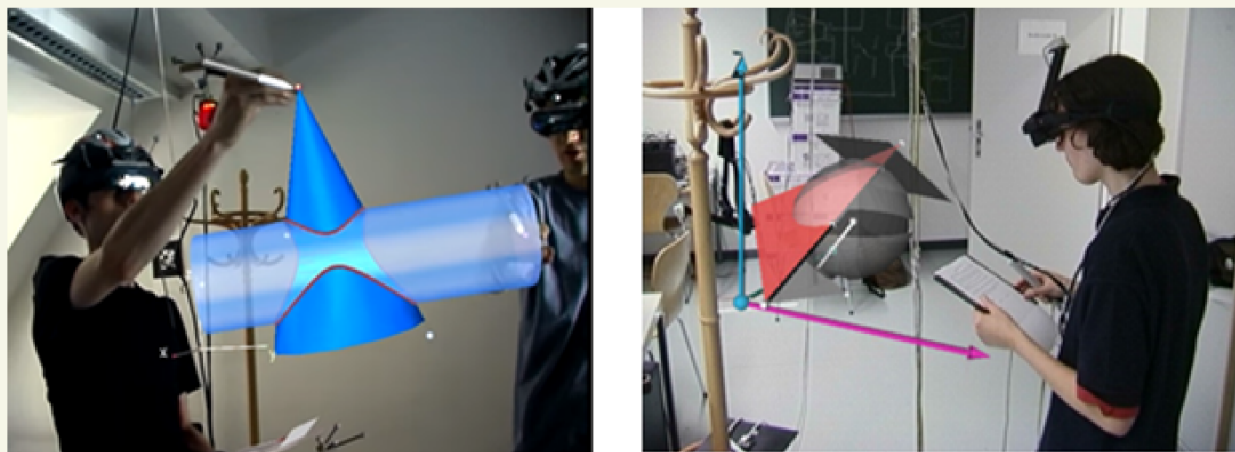
*Construct3D: applicazione per l'insegnamento della matematica e della geometria nella scuola secondaria di secondo grado*

Nel Dicembre del 2008, in Austria la Vienna University of Technology ha portato a termine un progetto di ricerca chiamato "Construct3D", uno strumento per la costruzione di modelli 3D in un ambiente virtuale immersivo per sviluppare abilità spaziali.

L'obiettivo era quello di creare uno strumento semplice e intuitivo dall'interfaccia *user friendly*. I ricercatori hanno integrato il sistema di realtà aumentata collaborativa Studierstube, che permette agli studenti di vedere in parte e interagire con il mondo reale.

[1] [https://www.youtube.com/watch?v=o6Xlz\\_Afk9A](https://www.youtube.com/watch?v=o6Xlz_Afk9A)

Esso include un sistema di aiuto audio per dare feedback e una funzionalità che permette l'interazione con il docente. Le principali aree di applicabilità nell'insegnamento della matematica e della geometria sono l'analisi vettoriale, la geometria descrittiva e la geometria generale. Lo strumento fornisce agli studenti un'immagine quasi concreta di oggetti e ambienti complessi tridimensionali.



Fonte: <https://www.ims.tuwien.ac.at/projects/construct3d>

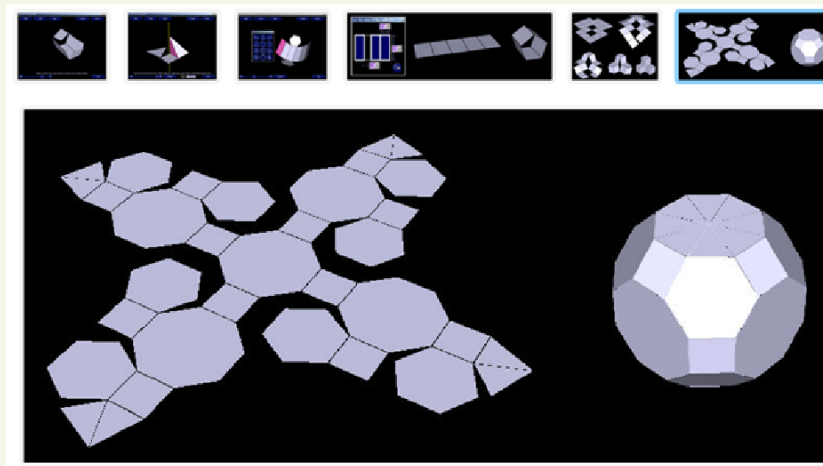
Durante la ricerca è stato condotto uno studio pilota informale con 14 studenti di Vienna, di età compresa tra i 22 e i 34, per valutare l'efficacia dello strumento. Il loro compito era quello di risolvere un esempio di costruzione tratto dall'analisi vettoriale come insegnata nelle scuole superiori in Austria con l'aiuto di un tutor. A seguito dell'esperienza, hanno partecipato a un breve sondaggio sull'esperienza globale e sullo strumento.

Gli studenti hanno gradito molto l'esperienza, dichiarando che avrebbero utilizzato volentieri di nuovo la tecnologia VR e che hanno trovato tale tecnologia uno strumento fantastico per esplorare la matematica in un contesto ludico. In molti hanno evidenziato che la visualizzazione delle forme 3D era molto più semplice rispetto a quello proposto da un monitor, nonostante abbiano avuto bisogno dell'aiuto del tutor per superare alcune difficoltà tecniche e fisiche (6 partecipanti hanno sofferto di vertigini). Ciononostante, tutti hanno immaginato diversi usi di Construct3D nella risoluzione di semplici problemi nell'insegnamento della matematica e della geometria.

### ***Il progetto DALEST (Sviluppo di un ambiente di apprendimento attivo per l'apprendimento della Geometria dei solidi)***

Il progetto DALEST è stato co-finanziato dall'Unione Europea tramite il programma Socrates, MINERVA, 2005 Selection. Il lavoro è stato svolto tramite una collaborazione internazionale di cinque università: University of Cyprus, University of Southampton, University of Lisbon, University of Sofia, University of Athens, N.K.M Netmasters e la Cyprus Mathematics Teachers Association.

L'applicazione sviluppata puntava ad aiutare gli studenti nel progettare e creare oggetti matematici attraverso lezioni pedagogiche adatte per l'insegnamento della geometria dei solidi e a sviluppare il pensiero spaziale nelle scuole elementari e medie. Erano presenti diversi livelli e gli studenti dovevano risolvere problemi matematici misurando, tagliando, piegando e dispiegando e manipolando le forme, per ottenere oggetti matematici.



Fonte: <http://pavel.it.fmi.uni-sofia.bg/elica/dalest/on.html>

Gli studenti che hanno provato le applicazioni e hanno manipolato diversi tipi di reticolati, sono passati dalla modalità 2D a quella 3D. Tutti gli studenti hanno espresso soddisfazione a seguito dell'esperienza e, nello stesso tempo, non hanno disdegnato la tradizionale attività di creare modelli di carta con le forbici. L'impressione generale dopo aver testato lo strumento è stata che esso ha fornito più spazio per la sperimentazione e il gioco con idee differenti, cosa che gli studenti hanno trovato entusiasmante. (Gli strumenti sono disponibili sul sito web del progetto: DALEST PROJECT).

In conclusione, basandoci sugli esempi forniti in precedenza, possiamo affermare che:

Nonostante non ci siano ancora molti esempi documentati formalmente dell'utilizzo della tecnologica VR nell'insegnamento della matematica, le testimonianze dei ricercatori e degli studenti che hanno fatto uso di tale tecnologia sono particolarmente promettenti, il che rende l'esplorazione di questo campo meritevole di attenzione. C'è da ricordare che, anche se le opinioni ottimistiche sull'uso di tale tecnologia dovessero trovare riscontro negli studi, la VR è sempre da considerare uno strumento aggiuntivo all'insegnamento della matematica e mai un sostituto.

## **COSA RENDE PEDAGOGICO UNO STRUMENTO VR PER LA MATEMATICA: PROPRIETÀ E CRITERI**

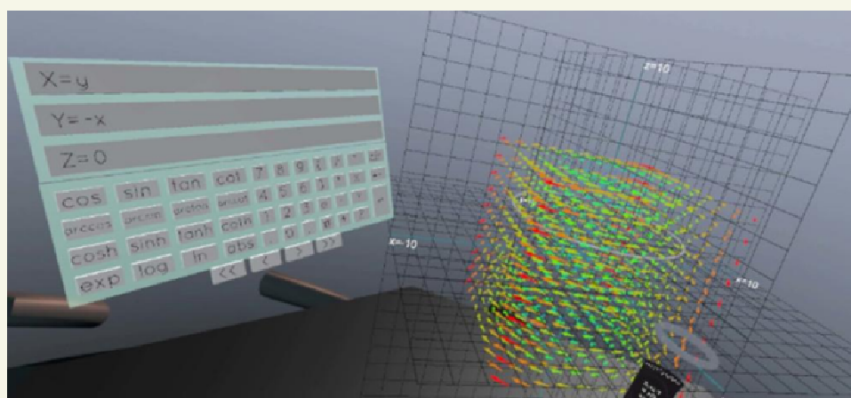
Lo sviluppo di contenuto VR sta muovendo ora i primi passi e le potenzialità dell'applicazione dell'idea di esperienza immersiva nel campo dell'istruzione sta suscitando sempre più interesse. Ecco alcune delle proposte già esistenti di strumenti matematici VR:

## CalcFlow

CalcFlow è un software gratuito e open source sviluppato da Nanome Inc. Per usarlo c'è bisogno di occhiali per la realtà virtuale Oculus o Vive; per gli utenti inesperti, gli sviluppatori hanno creato un'intera serie di video tutorial su YouTube.

*Obiettivo pedagogico:* permette lo studio e la visualizzazione del calcolo vettoriale in un ambiente interattivo. Può essere utilizzato per creare modelli matematici, per costruire e manipolare grafici 3D, editando allo stesso tempo i parametri, per creare la propria funzione parametrizzata e il campo vettoriale.

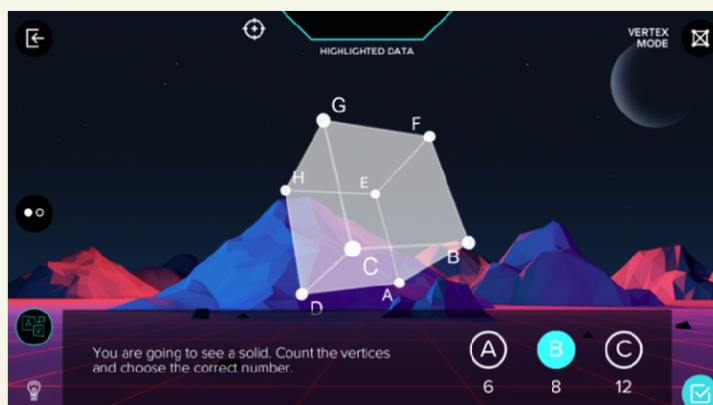
*Destinatari:* è pensata per studenti più grandi, che frequentano le ultime classi della scuola superiore di secondo grado, ma può essere utilizzata anche a livello universitario.



Fonte : <https://vrroom.buzz/vr-news/trends/get-ready-love-math-vr-calculator>

## VR Math

VR Math è parte di VARP Edu, che è una piattaforma educativa per varie materie. È una app che aiuta gli studenti a comprendere e gli educatori a insegnare la geometria 3D. VR Math è un servizio che richiede una licenza e una sottoscrizione. Il contenuto in sé è accessibile attraverso l'utilizzo combinato del telefono e di una semplice scheda per occhiali VR oppure in 360° su un touch screen. Al momento (maggio 2019) è ancora nella versione beta.



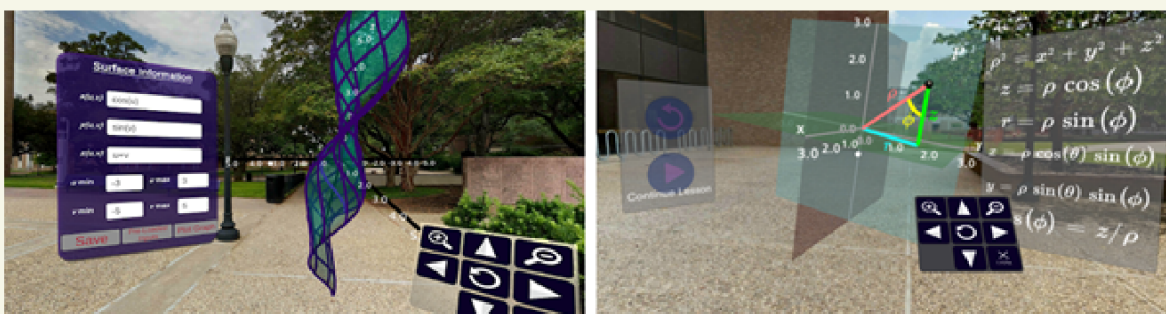
Fonte : <http://kornelmeszaros.com/vr-math/>

*Obiettivo pedagogico:* si concentra per lo più sulla geometria e lo sviluppo della consapevolezza e comprensione spaziale degli studenti. Le sue interessanti caratteristiche spaziano dalla possibilità di accedere al contenuto come studente, il che permette di andare al proprio passo, stimolando l'autoapprendimento.

*Destinatari:* Studenti della scuola primaria e secondaria

## CalculusVR

Questa app gratuita è un progetto nato dalla passione del dr. Nicholas Long del Dipartimento di Matematica e Statistica della Stephen F. Austin State University. CalculusVR permette all'utente di visualizzare i concetti del calcolo a più variabili in un ambiente di realtà virtuale. Per utilizzarlo, hai solo bisogno di un telefono e di un set Google Cardboard.



Fonte: <https://longnesfa.wordpress.com/calculus-in-virtual-reality-project/>

*Obiettivo pedagogico:* il contenuto copre diversi moduli, come: coordinate e grafici 2D e 3D, curve e superfici, funzioni vettoriali a una variabile, funzioni a più variabili. L'utente può specificare quali oggetti visualizzare oppure può seguire lezioni sulla geometria e sull'analisi di funzioni a più variabili e delle superfici corrispondenti.

*Destinatari:* studenti universitari.

## MashUp Math

MashUp Math è un'iniziativa di un gruppo di giovani educatori, i quali credono che gli studenti imparino la matematica in modo differente, per cui un approccio univoco è del tutto inefficace. Sul loro sito web [www.mashupmath.com](http://www.mashupmath.com) ci sono moltissime risorse gratuite come video, fogli di calcolo e puzzle matematici. Il loro canale YouTube (in inglese) è stato aggiornato l'ultima volta nel 2017, ma ha oltre 100 brevi video nei quali si affrontano numerosi problemi matematici in modo chiaro, con particolare attenzione sulla manipolazione e sull'approccio non formale.





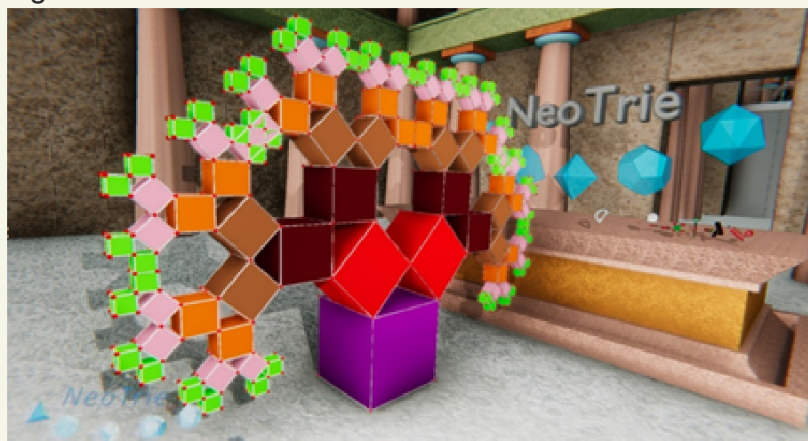
Fonte: <https://www.virtualiteach.com/single-post/2018/06/04/Maths-in-VR>

*Obiettivo pedagogico:* Insegnare matematica, rendendola accessibile e divertente. I materiali coprono argomenti come: algebra, geometria, matematica per la scuola primaria e secondaria di primo grado. MashUp Math ha cominciato a sperimentare video a 360° per affrontare problemi algebrici. È un'idea semplice, che può essere facilmente replicata in classe con una videocamera a 360°.

*Destinatari:* studenti dagli 8 ai 15 anni.

### 3D Geometry in Virtual Reality di NeoTrieVR

È un progetto portato avanti da José L. Rodríguez dell'Universidad de Almería. È stato sviluppato in collaborazione con Virtual Dor. Lo scopo del software è quello di permettere agli utenti di creare, manipolare e interagire in 3D con oggetti geometrici e modelli di differente tipologia.



Fonte: <http://virtualdor.com/NeoTrie-VR/>

*Obiettivo pedagogico [1]:* Esaminare aspetti della geometria piana visibili attraverso gli occhi della terza dimensione; introdurre la geometria 3D e la realizzazione di modelli 3D da poter stampare; sviluppare le capacità manuali e le abilità visuali 3D; stimolare le capacità di ragionamento deduttivo e induttivo; favorire il lavoro cooperativo e l'interdipendenza positiva; motivare gli studenti attraverso giochi ricreativi, collaborativi e competitivi.

*Destinatari:* Dal momento che il progetto è ancora in fase di sviluppo, non è ancora possibile specificarne i destinatari.

[1] <http://virtualdor.com/NeoTrie-VR-Edu/>

# ASPETTI PRATICI DELL'USO COMBINATO DELL'APPROCCIO NON FORMALE E DELLE INNOVAZIONI DELLA TECNOLOGIA VR PER LA MATEMATICA NELLA CLASSE

## IL PROCESSO DI CONVERSIONE DI UNO STRUMENTO MATEMATICO IN UNA SOLUZIONE VR E LA SUA IMPLEMENTAZIONE IN UNA LEZIONE

### Introduzione

Quando usiamo un modello matematico, semplifichiamo una situazione reale attraverso un'astrazione: con ciò, possiamo spiegare, descrivere e predire gli aspetti del mondo reale attraverso le rappresentazioni, come ad esempio l'interpretazione della realtà data da diagrammi, grafici, espressioni simboliche. Il problema è che gli studenti spesso vedono queste rappresentazioni come il prodotto finale e non sono in grado di considerarli come uno strumento per comprendere la realtà. L'utilizzo di modelli VR può cambiare questa prospettiva?

Ci sono due modi per risolvere problemi matematici utilizzando modelli:

*Imparare a modellare:* agli studenti è richiesto di costruire un modello della realtà; per far ciò, ogni elemento del modello stesso dev'essere pienamente compreso. Non è un compito semplice e può essere considerato lo scopo del processo educativo, piuttosto che un modo per insegnare nuovi concetti.

*Imparare con i modelli:* questo approccio incoraggia gli studenti a risolvere problemi utilizzando modelli preesistenti: gli studenti imparano modificando parametri e studiando le relazioni esistenti tra tutti gli oggetti presenti nel modello. Per utilizzare questo approccio, abbiamo bisogno di creare modelli specifici, attività e manipolativi per ogni campo della matematica. Questi modelli possono essere facilmente costruiti attraverso la Realtà Virtuale.

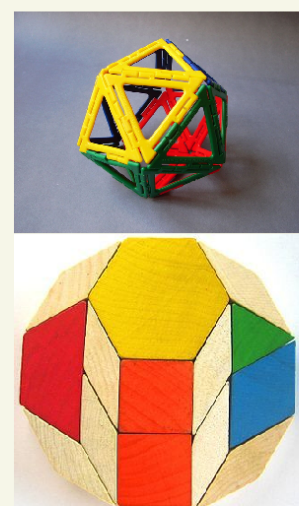
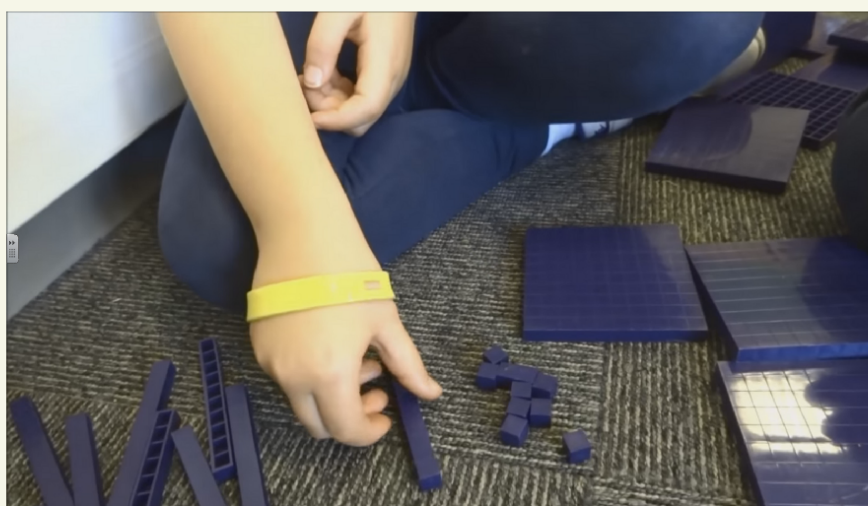
Questa sezione aiuterà gli educatori a scegliere argomenti e concetti matematici adatti a essere insegnati tramite applicazioni di Realtà Virtuale in lezioni non formali.

## Passo 1 – Come scegliere gli argomenti e i concetti matematici

Se i docenti vogliono che gli studenti imparino attraverso l'esperienza, dovrebbero scegliere argomenti nei quali si richiede ai discenti di interagire. Per organizzare una lezione non formale efficace, i docenti dovrebbero utilizzare strumenti che permettano ai propri studenti di recitare un ruolo attivo nell'apprendimento. È possibile ottenere ciò attraverso l'uso dei manipolativi.

### *L'importanza dei manipolativi*

I manipolativi sono un concetto fondamentale che un docente di matematica dovrebbe conoscere bene : sono modelli concreti che riguardano concetti matematici, per esempio oggetti reali o virtuali che possono essere usati e spostati dagli studenti, come le tessere di algebra, pezzi per le frazioni, tasselli, solidi geometrici, regoli.



Fonti:

base-ten blocks (left) - [https://en.wikipedia.org/wiki/Base\\_ten\\_blocks#/media/File:Dienes\\_blocks\\_used\\_by\\_a\\_8\\_year-old\\_student.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Base_ten_blocks#/media/File:Dienes_blocks_used_by_a_8_year-old_student.png);

a Polydron icosahedron (top right) [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polydron\\_09489.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polydron_09489.jpg); pattern blocks (bottom right);

[https://en.wikipedia.org/wiki/Pattern\\_Blocks#/media/File:Wooden\\_pattern\\_blocks\\_dodecagon.JPG](https://en.wikipedia.org/wiki/Pattern_Blocks#/media/File:Wooden_pattern_blocks_dodecagon.JPG)

Da un punto di vista storico, sin dal secolo scorso alcuni studi (Driscoll 1983, Sowell 1989, Suydam 1986) hanno già mostrato che i manipolativi, se scelti correttamente, possono essere benefici per gli studenti di ogni grado e capacità, ogni qual volta siano utilizzati per spiegare e chiarire un concetto; per esempio, Suydam e Higgins (1976) hanno dimostrato che le lezioni con i manipolativi possono migliorare le abilità e le capacità matematiche in misura molto maggiore rispetto alle lezioni in cui non è contemplato l'utilizzo di tali strumenti: ciò suggerisce che ogni studente dovrebbe avere l'opportunità di interagire con manipolativi.

Il loro uso non deve essere limitato alla dimostrazione del docente, perché essi risultano efficaci quando sono utilizzati per coinvolgere gli studenti in attività interattive.

## Passo 2 – Argomenti e concetti matematici adatti

L'uso della Realtà Virtuale ha grandi potenzialità nell'insegnamento della matematica e della geometria: rendere possibile trovare vie innovative per insegnare la disciplina, garantendo l'opportunità di studiare problemi più difficili e complessi, che nel passato erano fuori dalla portata degli studenti.

Alcuni degli argomenti più adatti, studiati nelle scuole di tutto il mondo, che possono essere insegnati tramite ambienti VR sono:

- abilità e/o concetti matematici di base, come le quattro operazioni di base, le frazioni, calcolo mentale (per la scuola primaria);
- trigonometria, algebra vettoriale, geometria 3D, visualizzazione di grafici, studi di funzione e altre applicazioni e problemi tridimensionali (per la scuola secondaria di secondo grado);
- analisi (funzioni complesse), algebra lineare, analisi e geometria differenziale, geometria proiettiva (per gli studi universitari).

Nel Capitolo 1, per esempio, abbiamo visto esempi di strumenti pedagogici che utilizzano matematica non formale. È stato fatto notare che la forma potrebbe essere molto differente. Alcuni di questi strumenti possono essere convertiti (e resi più potenti) attraverso la Realtà Virtuale.

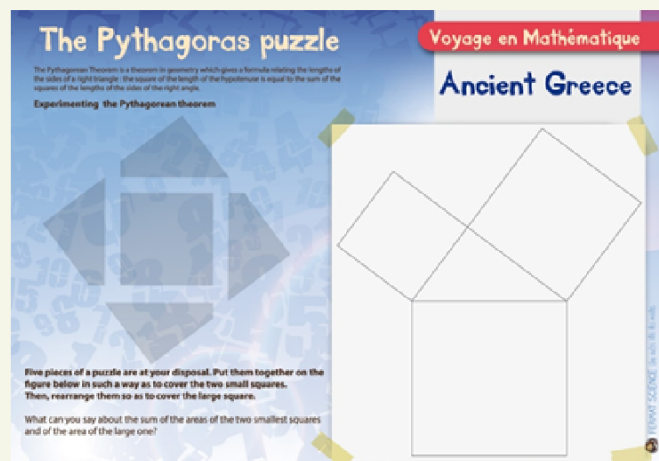
Consideriamo come esempio la manipolazione tramite tessere della dimostrazione del teorema di Pitagora e analizziamo la possibile conversione in uno strumento VR.

Il teorema di Pitagora calcola la lunghezza del terzo lato di un triangolo rettangolo, quando le misure degli altri due sono note.

### Forma matematica:

Dato un triangolo rettangolo ABC, si dimostra che  $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$ .

Lo scopo è quello di utilizzare tessere di legno come in un puzzle, per dimostrare il teorema di Pitagora.



### Passo 3 – Come integrare l'argomento e il concetto matematico in una lezione non formale

La Realtà Virtuale dev'essere usata per adattare il contenuto matematico tradizionale in modo tale da renderlo tangibile, visibile e comprensibile. Le informazioni ottenute tramite la vista sono acquisite in modo passivo: il tocco è un processo attivo e bidirezionale (Sourin & Wei 2009); deve aiutare i discenti a comprendere concetti e sistemi complessi, astratti e non intuitivi, manipolando su parametri rilevanti e assumendo differenti punti di vista in tempo reale; deve altresì potenziare l'apprendimento rendendo ludica l'esperienza: gli ambienti di apprendimento con grafica 3D sono coinvolgenti, interattivi e flessibili. Gli studenti abituati ai videogiochi sono altamente motivati a partecipare a giochi interattivi: ciò li stimola a costruire attivamente la conoscenza attraverso l'apprendimento attivo.

Lo strumento presentato nel passo 2 è un buon esempio di inclusione di un concetto matematico (in questo caso il Teorema di Pitagora) in una lezione non formale, dal momento che lascia aperte molte opportunità di apprendimento: in geometria (caratteristiche della forma, lessico, pavimentazione), in storia della matematica (con la storia della Grecia antica ecc.). Inoltre, è collegato ai programmi scolastici in Europa. Gli obiettivi educativi sono importanti. Questo strumento educativo funziona particolarmente bene nelle lezioni di matematica. Difatti, l'approccio non formale a questo teorema consente un miglior apprendimento e una miglior comprensione.

La trasposizione nella VR del "Puzzle di Pitagora" può dare molte più opportunità pedagogiche rispetto agli altri strumenti esistenti. Questa è una delle ragioni per le quali bisogna chiaramente definire l'obiettivo da conseguire a priori. In questo caso, vogliamo che gli studenti imparino a memoria il teorema di Pitagora? O è un primo approccio alla storia della matematica? O entrambi? Questo obiettivo educativo dovrebbe essere esplicitato chiaramente sin dall'inizio, così come è necessario definire tutte le attività che potrebbero scaturire dagli obiettivi educativi.

Per esempio, riprendendo il nostro esempio di manipolazione tramite tasselli per la dimostrazione del teorema di Pitagora, in aggiunta alla manipolazione virtuale che porterebbe gli stessi vantaggi di quella reale, lo studente potrebbe:

- risolvere altre manipolazioni che dimostrano questo teorema;
- dimostrare matematicamente il teorema e trovare la sua formula;
- avere accesso a un video divertente che dimostra il teorema di Pitagora (esempio: <https://www.youtube.com/watch?v=YompsDIEdtc>);
- costruire un albero pitagorico (vedi l'immagine qui sotto);



- cronometrarsi e sfidare i propri amici;
- imparare qualcosa di più sul matematico Pitagora, ascoltando, per esempio, un audio che racconti la sua storia o guardando un video (<https://www.youtube.com/watch?v=qmoxwZCiWEM&feature=youtu.be>);
- vedere/studiare una bibliografia con i lavori su questo teorema o questo matematico e altro ancora;
- incontrare il matematico e fargli domande sui suoi tempi e sul suo teorema.

#### **Passo 4 – Come introdurre tecnologie innovative e applicazioni matematiche VR preesistenti in una lezione non formale?**

Come passo successivo, dobbiamo scegliere se l'osservatore (studente) sarà al centro dell'azione o sarà posizionato da un differente punto di osservazione. Interagirà con l'ambiente o no? Ci saranno video a 360° o creazione di modelli 3D?

Comunque sia, la VR e i sistemi di apprendimento tramite grafica 3D dovrebbero essere integrati in una lezione non formale sotto forma di gioco. Per ottenere i migliori risultati, le applicazioni matematiche VR devono soddisfare queste caratteristiche, come afferma Breuer (2011):

- *Interattività*: Apprendimento attivo e tramite esperienza;
- *Basato sulla multimedialità*: visualizzare/preparare contenuti e commenti usando modelli 3D, audio ecc.;
- *Coinvolgimento*: il gioco deve coinvolgere completamente, in modo tale da evitare che il giocatore si distraiga;

- *Sfida*: il gioco deve essere a difficoltà crescente, ma semplice per i principianti; deve mettere alla prova le abilità individuali per motivare continuamente i giocatori;
- *Ricompensa*: ricompense e feedback sui progressi devono potenziare il senso di autoefficacia e la motivazione;
- *Esperienza sociale*: deve fornire canali comunicativi che connettano i giocatori.

## Passo 5 – Media, Tecniche e contesto ambientale che potrebbero rinforzare il processo educativo

A questo punto dobbiamo prendere le decisioni finali che riguardano il contesto ambientale del nostro strumento, nel caso fossimo i creatori/costruttori dell'app/dello strumento VR. Gli elementi di decorazione, il suono (parole/musica) e la spazializzazione dà la possibilità di dar vita all'ambientazione.

Cosa sarà più rilevante per gli obiettivi educativi nel nostro esempio: vogliamo ricreare l'antica Grecia di Pitagora, un mondo giocoso o uno "geometrico"? Musica classica per concentrarsi meglio, ritmata per enfatizzare la motivazione o contemporanea, per rendere meno noiosi i compiti ripetitivi e per aiutare gli studenti a essere più efficaci nel problem solving? Ci sarà una voce fuori campo o le interazioni avverranno scrivendo? Un'idea potrebbe essere quella di creare diversi ambienti distinti per ogni esercizio/compiti assegnato all'interno del "Puzzle di Pitagora".

Nel caso che non puntassimo a creare una app o uno strumento virtuale dall'inizio, possiamo in alternativa lavorare su manipolativi virtuali già pronti all'uso, sviluppati specificatamente per gli argomenti/concetti che vogliamo insegnare: ci sono alcuni software disponibili in commercio utilizzabili per l'apprendimento e l'insegnamento, come:

Mathcad (<https://www.ptc.com/en/>);

Maple (<https://www.maplesoft.com>);

Mathematica (<http://www.wolfram.com/mathematica/>);

MATLAB (<https://uk.mathworks.com/products/matlab.html>);

Geometer's Sketchpad (<http://www.dynamicgeometry.com/>).

Questi strumenti offrono agli studenti la possibilità di vedere immagini, senza l'esperienza di immergersi in un ambiente 3D: questa mancanza di coinvolgimento può avere come effetto un'esperienza di apprendimento di minor qualità, ma può comunque essere un valido strumento complementare da utilizzare per rafforzare le abilità matematiche degli studenti.

## Passo 6 – Creare l'esperienza

Una volta che l'architettura della futura app è stata definita, resta soltanto creare i vari elementi che comporranno il "Puzzle di Pitagora" VR o qualsiasi altro strumento adatto a essere convertito in VR.

### GUIDA PRATICA PER CREARE UNA CRONOLOGIA PROGRESSO

Per utilizzare la VR in classe, c'è bisogno di almeno due cose: uno smartphone che possa scaricare / eseguire applicazioni o file video e un set di occhiali VR. I telefoni Android con Giroscopio e sensori magnetometro sono compatibili con la VR. Molti degli apparecchi di gamma medio-alta li hanno in dotazione, il che li rende ideali per la VR/AR. Come software si possono utilizzare app gratuite o a pagamento o anche film girati con videocamere 360°. Anche se questi film non offrono la stessa esperienza 3D delle app, sono comunque straordinariamente interattivi e immersivi, se visti tramite set di occhiali VR.

Le osservazioni elencate di seguito si basano su una classe di 30 studenti e lezioni di 50 minuti. La struttura della lezione / il progetto di insegnamento riflettono il modo in cui l'attività di insegnamento sarà svolta per raggiungere gli obiettivi. La lezione è condotta seguendo una serie di passi, il che le fornisce una certa struttura, che non è obbligatoria né rigida. Il tipo di lezione potrebbe essere scelto tenendo conto dell'obiettivo generale da raggiungere. I principali tipi di lezione sono i seguenti:

**La lezione mista/combinata** – punta a portare avanti più o meno nella stessa misura alcuni compiti dell'insegnante (comunicazione, sistematizzazione, acquisizione, verifica) ed è il tipo di lezione più comune nella pratica didattica, soprattutto a livello scolastico;

**La lezione di comunicazione/acquisizione di nuova conoscenza** – ha l'obiettivo fondamentale di acquisire nuova conoscenza e di sviluppare capacità e approcci intellettuali; inoltre, l'acquisizione di nuovi contenuti avviene attraverso gli stessi passaggi presenti nel tipo misto, sebbene in misura minore, a seconda dell'età degli studenti (nell'insegnamento superiore le lezioni comunicative tendono ad avere una struttura composta da un'unica fase);



**La lezione per sviluppare abilità e competenze (specifiche per la matematica)** – cerca di far familiarizzare gli studenti con diversi metodi di lavoro intellettuale, in modo tale da abituarli ad organizzare e portare avanti autonomamente un lavoro, applicando praticamente la conoscenza acquisita.

I tre tipi di lezioni qui presentati hanno più o meno la stessa struttura generale, ma la loro differenza sta nell'importanza assegnata ai loro passaggi – presentazione del contenuto / acquisizione della conoscenza.

***La struttura e la tempistica di una lezione mista/combinata:***

	Lesson stages	Duration	VR
1	Organizational moment	3 min	
2	Updating/checking the previously acquired knowledge and skills, checking the homework	10 min	
3	Preparing for the new topic	3 min	
4	Announcement of the new topic and lesson objectives	3 min	
5	Optimal presentation of the content and directing learning by various ways depending on its nature; Training students in solving various tasks, gradually introduced, depending on the level of difficulty, on the psychological components involved in the learning process; differentiated and individualised activities, reported to the psychological particularities regarding age and individual.	15 min	Yes
6	Fixation of knowledge through repetition, systematization of knowledge and skills, through applications involving transfer of skills and abilities in contexts different from those created during the stage of orienting the learning process.	10 min	Yes
7	Ensuring retention and transfer by specifying the homework, accompanied by the explanations needed to continue learning and to ensure the operation with new knowledge and skills in new conditions/contexts	4 min	
8	Appreciations and recommendations	2 min	

Le applicazioni VR e i film 3D, essendo più attraenti e interattivi, possono essere utilizzati per presentare il nuovo contenuto e per osservare ed esplorare i collegamenti tra la teoria matematica e la realtà circostante. Ci sono (o possono essere progettate) applicazioni interattive da utilizzare nel momento dell'acquisizione della conoscenza tramite esercizi e problem solving.

Altri tipi di lezioni sono:

**La lezione di acquisizione della conoscenza e di sviluppo abilità e competenze** – punta, in particolar modo, al consolidamento della conoscenza acquisita e a colmare le lacune degli studenti; questo tipo di lezioni è efficace se ridimensiona il contenuto a idee con valore cognitivo rilevante, di modo che gli studenti siano capaci di effettuare collegamenti che permettano loro di svolgere compiti più complessi e operativi;

**La struttura generale e la durata di questo tipo di lezione è mostrata nella tabella seguente:**

	Lesson stages	Duration	VR
1	Organizational moment	3 min	
2	Announcement of the topic and objectives by presenting the revision plan, established and communicated to the students in the previous lesson	5 min	
3	Orienting the learning process by directing the revision/consolidation process: systematization, deepening knowledge and/or skills, establishing new correlation between them; transfer in new instructional contexts based on solving various tasks with progressive degrees of difficulty; synthesis, individual or group work; differentiated and individualised activities.	30 min	Yes
4	Ensuring retention and transfer by specifying the homework, accompanied by the explanations needed to continue learning and to ensure the operation with new knowledge and skills in new conditions/contexts	10 min	
5	Appreciations and recommendations	2 min	

**La lezione di verifica e valutazione dei risultati scolastici** – punta principalmente a verificare il livello di competenze degli studenti, ma anche l'organizzazione delle loro conoscenze applicata in contesti nuovi, con riferimento ai percorsi d'apprendimento del futuro.

**La struttura generale e la durata di questo tipo di lezione è la seguente:**

	Lesson stages	Duration	VR
1	Organizational moment	3 min	
2	Announcing the assessment objectives/competences to be evaluated – the proposed topic for the evaluation and how the evaluation <u>precess</u> will be carried out ; in the case of a large content evaluation, the topic will be established and announced in advance.	5 min	
3	Performance Assessment – This step is correlated with the specifics of the method (generally written, oral or practical evaluation) and the evaluation tools; the students are informed about the scales/and/or the assessment criteria.	30 min	Yes
4	Ensuring the inverse connection by checking the results <u>directly/individually</u> ; highlighting the typical mistakes, accompanied by additional explanations in order to clarify them.	10 min	Yes
5	Appreciations and recommendations	2 min	

Per quanto concerne la valutazione, le applicazioni VR possono essere progettate per contenere testi con diversi tipi di obiettivo (doppia scelta, scelta multipla o accoppiamenti) o semiobiettivi (con risposte brevi o risposte da aggiungere).

Tra i suoi vantaggi c'è il fatto che il discente ottiene la risposta corretta sul momento, apprendendo così la correlazione inversa immediatamente. Un altro vantaggio è la possibilità di tenere traccia / salvare le risposte degli studenti, mettendole a disposizione dell'insegnante attraverso un database.

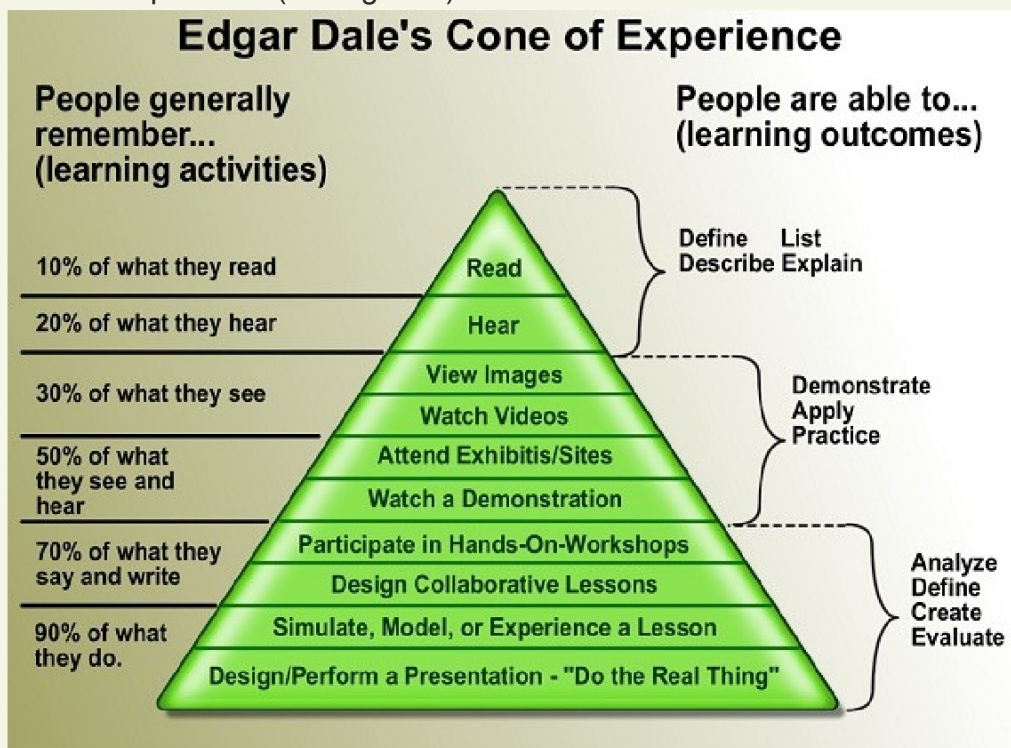
Alcuni degli svantaggi degli elementi per valutare obiettivi/semiobiettivi riguardano il fatto che non permettano la valutazione di obiettivi di apprendimento complessi, come l'originalità e la creatività degli studenti, la loro abilità di organizzare e integrare le proprie idee, l'interpretazione e l'applicazione delle informazioni da loro acquisite.

Come si può notare, la realizzazione di una lezione dipende da un numero di variabili come la natura del contenuto, gli obiettivi da raggiungere, il livello di competenze degli studenti e il tipo di strategia di insegnamento utilizzata.

# GUIDA PRATICA SU COME INTEGRARE QUESTE LEZIONI E LA REALTÀ VIRTUALE NEGLI ATTUALI PROGRAMMI DELLE NAZIONI PARTNER

## INTRODUZIONE E PRESENTAZIONE DELLA REALTÀ VIRTUALE NELLE LEZIONI DI MATEMATICA

La ricerca ha dimostrato che ricordiamo solo il 10% di quello che vediamo, mentre il 90% di ciò di cui facciamo esperienza (immagine 1).



Fonte: immagine 1. <https://www.td.org/Publications/Blogs/Science-of-Learning-blog/2015/03/Debunk-This-People-Remember-10-Percent-of-What-They-Read>

La tecnologia non rimpiazzerà mai l'insegnante, ma può essere d'aiuto nello sviluppare le abilità e competenze degli studenti necessarie per vivere nella società del XXI secolo – comunicazione, creatività, collaborazione e pensiero critico.

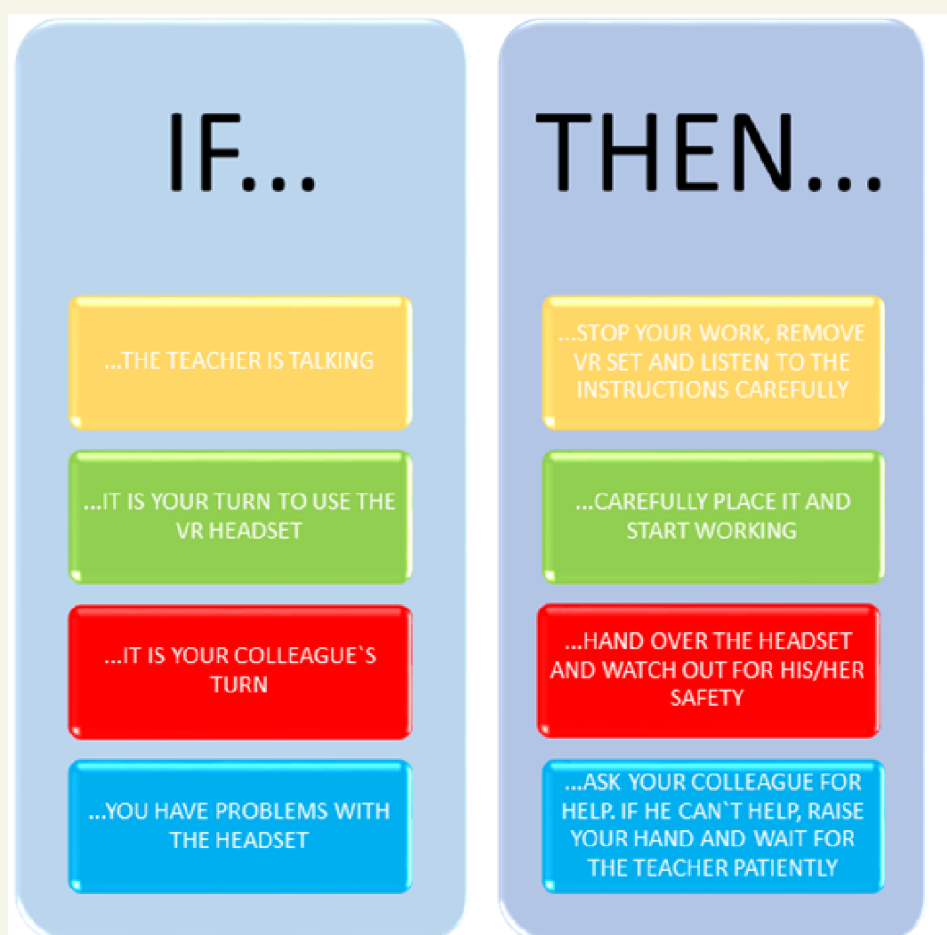
La realtà virtuale nell'apprendimento sta trasformando contenuti noiosi, rendendoli interessanti, di modo che anche gli studenti meno partecipativi vengano coinvolti. Creare lezioni per l'apprendimento attraverso la realtà virtuale fornisce un ambiente di apprendimento controllato; esperienze virtuali create attraverso la realtà virtuale permettono agli studenti di sperimentare senza essere esposti a rischi. Perciò, la tecnologia VR consente ai docenti di far divertire e apprendere in sicurezza attraverso l'esperienza.

La realtà virtuale garantisce allo studente la possibilità di commettere errori e di imparare da essi senza conseguenze, fornendogli l'opportunità di riprovare e aver successo – esercizio e consolidamento.

Prima di utilizzare la tecnologia VR con gli studenti in una classe si raccomanda di prendere del tempo e discutere l'uso di tale tecnologia, descrivendo l'esperienza e chiedendo cosa ci si aspetta. È responsabilità dei docenti creare la giusta atmosfera nella classe e scegliere gli obiettivi che si suppone debbano essere raggiunti.

Dopo la prima esperienza VR da parte degli studenti, il docente dovrebbe discutere di quest'esperienza con loro, chiedendo cosa hanno visto, cosa hanno provato, l'impatto e i risultati acquisiti.

Usare la realtà virtuale in classe probabilmente sarà fonte di gioia ed eccitazione per gli studenti. Questo può influenzare la percezione dell'apprendimento da parte degli studenti. Per questo motivo, i docenti devono stabilire regole chiare e fornire informazioni dettagliate per l'apprendimento nell'ambiente virtuale; gli studenti devono altresì essere a conoscenza delle regole di condotta. Il docente deve evidenziare l'importanza di una buona comunicazione tra studenti e tra studenti e docenti durante l'utilizzo della tecnologia VR.



Quando si introduce l'argomento utilizzando la VR, il docente deve indirizzare l'attenzione degli studenti sul contenuto in sé, affinché non perdano alcun dettaglio importante per l'apprendimento. I teenager sono inclini all'esperienza emozionale e possono essere distratti dall'uso della VR. Per questo motivo il docente deve sottolineare l'importanza dei risultati sia nel mondo reale che in quello virtuale. Senza un'alta soglia dell'attenzione, gli studenti potrebbero perdere dettagli importanti nell'esperienza di apprendimento VR.

## Regole e sicurezza durante l'uso della VR in classe

Per ottenere il massimo risultato da una lezione che sfrutta la nuova tecnologia, è necessario definire in anticipo i metodi di lavoro e le regole di condotta all'interno e all'esterno della classe. Prima di utilizzare la tecnologia in sé, gli studenti devono essere informati sulle precauzioni di sicurezza, che possono essere riassunte nei seguenti punti. È necessario minimizzare qualsiasi fattore esterno che possa disturbare la classe durante l'uso della VR. Chiari segnali di avvertimento sulle porte dovrebbero tener lontane le persone dall'entrare e disturbare il lavoro. È altresì importante permettere agli studenti di lavorare in silenzio. Quando si utilizzano i set di occhiali VR è impossibile per gli studenti vedere ciò che li circonda. Per questo motivo, ogni rumore o disturbo dev'essere ridotto al minimo. Ogni oggetto di intralcio dev'essere rimosso. Le regole di condotta e la comunicazione durante il lavoro devono essere chiaramente leggibili e visibili.

- Ascoltare attentamente il docente;
- Rimuovere ogni oggetto di intralcio prima di usare la VR;
- lavorare sempre in coppia – mai da soli;
- tener pulito il dispositivo VR.

## Esposizione e Valutazione: in che modo l'educatore può discutere il processo educativo innovativo con gli studenti

I docenti possono utilizzare diversi tipi e metodi di valutazione per controllare se gli obiettivi di una lezione sono stati raggiunti. Alcuni modelli di metodi di valutazione utilizzabili sono presentati di seguito:

### 1. METODI DI VALUTAZIONE

- Analisi del portfolio;
- Osservazione della performance degli studenti nelle attività, nel lavoro pratico e nella ricerca;
- Verifica orale;
- Analisi dei report, poster, mappe concettuali e ricerche degli studenti;
- valutazione di una discussione nella quale lo studente ha partecipato attivamente; verifica scritta.

## 2. VALUTAZIONE DELLA LEZIONE

Valutazione delle seguenti affermazioni in una scala da 1 a 5 (1 = per niente, 5 = del tutto d'accordo).

1. I like the way of work in this lesson.	1	2	3	4	5
2. This lesson was interesting.	1	2	3	4	5
3. It is clear what I was supposed to learn in this lesson.	1	2	3	4	5
4. The subject matter was clearly explained.	1	2	3	4	5
5. I have learned the subject matter.	1	2	3	4	5
6. I think I actively participated in this lesson.	1	2	3	4	5
7. I was more active in this lesson than usually.	1	2	3	4	5
8. By being active I contributed to the quality of the lesson.	1	2	3	4	5
9. I was motivated for work in this lesson.	1	2	3	4	5
10. I prefer using VR in lessons.	1	2	3	4	5
11. Name two things you liked in this lesson.					
12. Name two things you didn't like in this lesson.					

## 3. VALUTAZIONE DEL LAVORO DI GRUPPO

ELEMENTS	YES	PARTLY	NO
1. We have completed the task successfully.			
2. Each member of the team has contributed to the fullest.			
3. All members of the team have participated in completing the task.			
4. We have accepted each other's opinions.			
5. I like this way of learning.			
6. I can explain what I have learned after this lesson.			

## BIBLIOGRAFIA

- Buldioski, G., Grimaldi, C., Mitter, S., Titley, G., & Wagner, G. (2002). Training Essentials. T-Kits (Vol. 6). Strasbourg: Council of Europe Publishing. Retrieved from [http://youth-partnership-eu.coe.int/youth-partnership/documents/Publications/T\\_kits/6/tkit6.pdf](http://youth-partnership-eu.coe.int/youth-partnership/documents/Publications/T_kits/6/tkit6.pdf)
- Carver, Rebecca L. (1996). Theory for practice: A framework for thinking about experiential education. *The Journal of Experiential Education*. 19:8-13.
- Carver, Rebecca L. (1998). Experiential education for youth development. Youth Development Focus, 4-H Center for Youth Development, University of California, Davis, fall.
- Catterall J., Chapleau R., and Iwanaga J. (1999). Involvement in the arts and human development: General involvement and intensive involvement in music and theatre arts. In E. B. Fiske (ed.) *Champions of Change* (pp. 1-18). Washington, DC: Arts Education Partnership. Chisholm, L. (2001). Towards a revitalisation of non-formal learning for a changing Europe. Report of the Council of Europe Youth Directorate Symposium on Non-Formal Education. Strasbourg, 13 – 15 October 2000.
- Dewey, John. (1916). "Democracy and education: an introduction to the philosophy of education." New York: The Macmillan Company. Enfield, Richard. (2001). Connections between 4-H and John Dewey's philosophy of education. Youth Development Focus, 4-H Center for Youth Development, University of California, Davis, winter.
- Enfield, Richard. (2000). SLO Scientists: Families having fun with Science Clubs. In Braverman, Marc T., Ramona M. Carlos, and Sally M. Stanley, Eds. *Advances in Youth Development Programming: Reviews and Case Studies from the University of California*. Oakland, CA: University of California Agriculture and Natural Resources.
- Gillert, A., Haji-Kella, M., Jesus Cascao Guedes, M. de, Raykova, A., Schachinger, C., & Taylor, M. (2000). Intercultural Learning. T-Kits (Vol. 4). Strasbourg: Council of Europe Publishing. Retrieved from [http://youth-partnership-eu.coe.int/youthpartnership/documents/Publications/T\\_kit\\_s/4/tkit4.pdf](http://youth-partnership-eu.coe.int/youthpartnership/documents/Publications/T_kit_s/4/tkit4.pdf)
- Johnson C. M. and Memmott J. E. (2006). Examination of relationships between participation in school music programs of differing quality and standardized test results. *Journal of Research in Music Education*, 54, pp. 293-307.
- Russell, Stephen T., and Glen H. Elder, Jr. (1997). "Academic Success in Rural America: Family Background and Community Integration." *Childhood*. 4:169-181.
- Van Horn, Beth E., Constance A. Flanagan, and Joan S. Thomson. (1998). The First Fifty Years of the 4-H Program (Part 1). *Journal of Extension*, 36(3): <http://www.joe.org/joe/1998december/comm2.html>. Siurala, Lasse (2008): The variety and differences amongst the concepts of nonformal education. Vilnius, 16.04.2008.
- Walker, Joyce. (1998). "Youth Development Education: Supports and Opportunities for Young People." The Center. University of Minnesota Center for 4-H Youth Development. Winter:10-13.
- Bell, J. T., & Fogler, S. H. (1995). The investigation and application of virtual reality as an educational tool. *Proceedings of the American Society for Engineering Education Annual Conference*, Anaheim, CA; Breuer, J. (2011). Spielend lernen? Eine Bestandsaufnahme zum (Digital) Game-Based Learning. Landesanstalt für Medien NRW; Clements, D. H., & McMillen, S. (1996).
- Rethinking Concrete Manipulatives. *Teaching Children Mathematics*, 2(5), pp. 77 and 270-279;
- Dorward, J., & Heal, R. (1999). National Library of Virtual Manipulatives for Elementary and Middle Level Mathematics. *Proceedings of WebNet99 World Conference on the WWW and Internet*, pp. 1510-1512. Honolulu, Hawaii Association for the Advancement of Computing in Education;
- Driscoll, Mark J. (1983). *Research within Reach: Elementary School Mathematics and Reading*. St. Louis: CEMREL;
- Durlach, N., Allen, G., Darken, R., Garnett, R. L., Loomis, J., Templeman, J., & von Wiegand, T. E. (2000). Virtual environments and the enhancement of spatial behavior: Towards a comprehensive research agenda. *Presence -Teleoperators and Virtual Environments*, 9(6), 593-615;
- Fennema, E. H. (1972). Models and mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 19, 635-640. Retrieved 28 March, 2019, from <https://www.jstor.org/stable/41188128>
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning placevalue with understanding in first grade. *Journal for research in Mathematics Education*, 23, 98-122. Retrieved March 28, 2019 from <https://www.jstor.org/stable/749496> ;
- Lesh, R. A. (1979). *Applied ProblemSolving in Early Mathematics Learning*. Northwestern University;
- Moyer, P. S., Bolyard, J.J., & Spikell, M.A. (2002). What are virtualmanipulatives? *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 372-377. Retrieved 21 March, 2019, from <https://www.jstor.org/stable/41197834>; NCTM, National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for schoolmathematics*. Reston, VA, p. 17;
- Post, T. (1981). The Role of Manipulative Materials in the Learning of MathematicalConcepts. In *Selected Issues in Mathematics Education*. Berkeley, CA:National Society for the Study of Education and National Council of Teachers of Mathematics, McCutchan Publishing Corporation;
- Rizzo, A. A., Buckwalter, J. G., Neumann, U., Kesselman, C., Thiebaut, M., Larson, P., & Van Rooyen, A. (1998). The virtual reality mental rotation spatial skills project. *CyberPsychology andBehavior*, 1(2), 113-120; Sourin, A., Lei, W., (2009). Visual immersive haptic mathematics, *Virtual Reality* (2009) 13, pp. 221–234;
- Sowell, Evelyn J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20:498-505. Retrieved March 25, 2019, from <https://www.jstor.org/stable/749423>;
- Suydam, M. N. (1986). Research Report: Manipulative Materials and Achievement. *ArithmeticTeacher*, 33, pp 10, 32. Retrieved 25 March, 2019, from <https://www.jstor.org/stable/41192833> ;
- Suydam, M. N., & Higgins, J. L. (1976). Review and Synthesis of Studies of Activity-Based Approaches to Mathematics Teaching. Final Report, NIEContract No. 400-75-0063;
- Taxén, G., Naeve, A. (2001). *CyberMath: A System for Exploring Open Issues in VR-based Education*, Center for User Oriented IT Design, Royal Institute of Technology, Stockholm; Winn, W., & Bricken, W. (1992). Designing virtual worlds for use in mathematics education: The example of experiential algebra. *EducationalTechnology*, 32(12), 12-19. Retrieved 22 March, 2019, from <https://www.jstor.org/stable/44425562>
- <https://www.weareteachers.com/virtual-reality-classroom/>[https://www.researchgate.net/publication/325248053\\_Learning\\_in\\_a\\_virtual\\_environment\\_Implementation\\_and\\_evaluation\\_of\\_a\\_VR\\_math-game](https://www.researchgate.net/publication/325248053_Learning_in_a_virtual_environment_Implementation_and_evaluation_of_a_VR_math-game)[http://www.isj-db.ro/static/files/curriculum/Informatica\\_TIC/Anexa\\_2\\_Tipuri\\_de\\_lecii\\_FINAL.docx](http://www.isj-db.ro/static/files/curriculum/Informatica_TIC/Anexa_2_Tipuri_de_lecii_FINAL.docx)[http://www.isjcs.ro/Definitivat/GHID\\_DEF\\_pentru%20site.pdf](http://www.isjcs.ro/Definitivat/GHID_DEF_pentru%20site.pdf)
- [http://dppd.ulbsibiu.ro/ro/cadre\\_didactice/adriana\\_nicu/cursuri/Pedagogie%202\\_curs\\_8\\_Testul%20docimologic.pdf](http://dppd.ulbsibiu.ro/ro/cadre_didactice/adriana_nicu/cursuri/Pedagogie%202_curs_8_Testul%20docimologic.pdf)Sources of sub section 4.3 [www.cfeduex.com](http://www.cfeduex.com)
- <https://www.virtualiteach.com/single-post/2018/06/04/Maths-in-VR><https://nearpod.com/blog/virtual-reality-math/>
- <http://blog.scientix.eu/2018/05/the-use-of-immersive-virtual-reality-in-the-mathematics-classroom/>
- <https://www.veative.com/deployment/classroom-usage> <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1131313.pdf><https://www.cfeduex.com/setting-a-conducive-atmosphere-in-class-through-vr-learning-etiquette/>
- <https://www.cfeduex.com/emphasizing-the-benefits-of-virtual-reality-in-universities-and-its-students/>
- <https://observatory.tec.mx/edu-trends-augmented-and-virtual-reality/>
- <https://www.pinterest.com/https://loomen.carnet.hr/>
- <https://www.google.com/search?q=confucius+quotes+i+hear+i+forget&tbm=isch&source=univ&client=firefox-b-d&sa=X&ved=2ahUKEwi6g6vhiZbAhUqtIsKHfQgD64QsAR6BAGJEA&biw=1366&bih=645#imgrc=m18cSTENO6xstM:>





# Erasmus+

Il progetto Math Reality è finanziato grazie al supporto della Commissione Europea. Questa pubblicazione riflette unicamente le opinioni dell'autore e la Commissione non potrà essere ritenuta responsabile per l'uso che potrebbe essere fatto delle informazioni in essa contenute.

Codice progetto: 2018-1-FR01-KA201-048197

