

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΣ  
ΟΔΗΓΟΣ:  
Η ΕΙΚΟΝΙΚΗ  
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ  
ΣΤΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

“

Η μόνη πηγή γνώσης είναι η  
εμπειρία

”

ΆΛΜΠΕΡΤ ΑΪΝΣΤΑΪΝ



# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

- 04 Η ΜΗ-ΤΥΠΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
- 32 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ
- 35 ΕΝΣΩΜΑΤΩΝΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΕΙΚΟΝΙΚΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΗ ΜΗ-ΤΥΠΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
- 41 ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΠΤΥΧΕΣ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΕΙΚΟΝΙΚΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
- 51 ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΗΣ ΜΗ-ΤΥΠΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΩΝ ΕΙΚΟΝΙΚΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

# Η ΜΗ-ΤΥΠΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ. ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΜΗ-ΤΥΠΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

*Η μη-τυπική εκπαίδευση: ορίζεται ως μια εκπαιδευτική δραστηριότητα η οποία πραγματοποιείται εκτός του τυπικού εκπαιδευτικού συστήματος σχεδιασμένη να εξυπηρετεί αναγνωρισμένους πελατειακούς και εκπαιδευτικούς στόχους.*

**Coombs, Prosser & Ahmed, 1973**

Η μη-τυπική φέρει διάφορα από τα εγγενή χαρακτηριστικά της τυπικής εκπαίδευσης, καθώς αμφότερες επιδιώκουν τη μάθηση και την απόκτηση γνώσης, βασιζόμενες πάνω σε ένα μεθοδολογικά σχεδιασμένο πρόγραμμα σπουδών και επιστημονικά εύρωστους πόρους. Ταυτόχρονα όμως σε πολλά σημεία αποκλίνουν. Το πιο προφανές από αυτά είναι ότι η επίσημη εκπαίδευση λαμβάνει χώρα σε ένα σχολικό κτίριο, ενώ η ανεπίσημη εκπαίδευση μπορεί να συμβεί σε οποιοδήποτε μέρος το οποίο ανήκει σε μια κοινότητα. Συνεπώς, η μη-τυπική εκπαίδευση μπορεί να λαμβάνει χώρα σε διάφορα κοινωνικά και κοινοτικά περιβάλλοντα σε διάφορες μορφές. Για παράδειγμα σωματεία, χώρους συγκέντρωσης, συναντήσεις ομάδων, αθλητικές ή καλλιτεχνικές δραστηριότητες, ή εκδηλώσεις οι οποίες διοργανώνονται από τη νεολαία σχετικές με πραγματοποίηση εκπαιδευτικών εργασιών.

### **«Δημοκρατική Εκπαίδευση» μέσω βιωματική μάθησης**

Η μη-τυπική εκπαίδευση, από αναπτυξιακής άποψης θα μπορούσε να φανεί με διάφορους τρόπους επωφελής. Όπως υποστηρίζουν οι Van Horn, Flanagan και Thomson (1998), η μη τυπική εκπαίδευση προάγει τη βιωματική μάθηση, το προνόμιο της προσωπικής επιλογής και διασκορπίζει διαφορετικούς τύπους διαπροσωπικών σχέσεων. Μέσω της ανάθεσης μιας δομημένης εργασίας, όπου μπορεί να περιλαμβάνει δημιουργικά καθήκοντα και δραστηριότητες, οι νέοι ενθαρρύνονται στο να λαμβάνουν αποφάσεις σχετικές με τον προτιμώμενο για αυτούς τρόπο εργασίας ο οποίος θα τους οδηγήσει στην επιτυχή αφομοίωση της γνώσης. Κατά συνέπεια αυτό τους κάνει να αισθάνονται πιο ευέλικτοι στο να διερευνούν εκτενώς τις ικανότητες και τα ενδιαφέροντα τους.

Η μη τυπική εκπαίδευση βασίζεται στη σύνδεση της ατομικότητας με την κοινότητα, με τέτοιο τρόπο ώστε όλες οι δραστηριότητες να ανταποκρίνονται στις ανάγκες και τις απαιτήσεις των ατόμων αλλά και στα πλαίσια των προκλήσεων τις οποίες η κοινωνία καλείται να αντιμετωπίσει (Carver, 1998). Υπό αυτή την έννοια το άτομο και η κοινωνία έχουν μια αμφίδρομη σχέση δούνε και λαβείν.



Ο Enfield (2001) υποστηρίζει επίσης ότι η παράμετρος της βιωματικής μάθησης καλλιεργεί την ανάπτυξη των δεξιοτήτων και της γνώσης, καθώς είναι σχεδιασμένη με τρόπο που να προάγει τόσο τις διαπροσωπικές δεξιότητες όσο και την αλληλεπίδραση. Ισχυρίζεται επίσης ότι η βιωματική μάθηση ενισχύει την αυτοπεποίθηση στο δημιουργικό κομμάτι και καλλιεργεί τις προσωπικές σχέσεις σε μη-τυπικά περιβάλλοντα. Όχι μόνο στους νέους μεταξύ τους, αλλά και μεταξύ νέων και ενηλίκων. Επιπλέον, η έρευνα δείχνει ότι πέρα από το γνωστικό επίπεδο, οι μη-τυπικές μέθοδοι εκπαίδευσης 'προωθούν τη θετική ανάπτυξη των νέων, ανεξαρτήτως από τη μέθοδο, την κατάσταση των δραστηριοτήτων ή το υπόβαθρο των συμμετεχόντων (Russel, 2001).'

Μέσω μιας τέτοιας βιωματικής διαδικασίας, οι νέοι έχουν την ευκαιρία να αναπτύξουν μια σειρά κοινωνικών δεξιοτήτων «soft skills», υπονοώντας τη δυνατότητα για διερεύνηση προσωπικών ικανοτήτων, δεξιοτήτων και αξιών οι οποίες δεν είναι πάντοτε εύκολα ανιχνεύσιμες μέσα στο τυπικό εκπαιδευτικό σύστημα. Παραδείγματα τέτοιων δεξιοτήτων είναι η οργανωτική διαχείριση, η ομαδική δουλειά, η διαχείριση συγκρούσεων, 'ο σχεδιασμός, ο συντονισμός και η οργάνωση', η αυτοπεποίθηση και η αυτοεκτίμηση, η πρακτικότητα, η ανάληψη ευθύνης, η ηγεσία, η βελτίωση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων με πρακτικό τρόπο, η πειθαρχία, η διαπολιτισμική συνείδηση και πολλές άλλες κοινωνικές δεξιότητες σχετικές με την παγκόσμια εκπαίδευση.

Καταληκτικά, η μη-τυπική εκπαίδευση φαίνεται να έχει ευεργετική επίδραση σε τέσσερις βασικούς πυλώνες οι οποίοι συνυφασμένοι με τη ζωή των νέων:

**Στην προσωπική ανάπτυξη:** βοηθά τους νέους να ενισχύσουν την αυτοπεποίθηση και την αυτοεκτίμηση τους και κατ' επέκταση να συνειδητοποιούν καλύτερα τα δυνατά τους σημεία αλλά και τις αδυναμίες τους. Με τον τρόπο αυτό ενθαρρύνονται να βγουν από τη ζώνη άνεσης τους, καθώς και να ανακαλύπτουν το εύρος των ικανοτήτων τους, τα χαρίσματα και τα ταλέντα τους.

**Στην ανάπτυξη της ενεργού συμμετοχής στα κοινά:** καλλιεργεί κοινωνικές δεξιότητες και ικανότητες σχετικές με την ιδιότητα του πολίτη, καθώς και με την έκφραση και κατανόηση διαφορετικών απόψεων, στοιχεία πολύ ιδιαίτερα σημαντικά σε μια εποχή όπου οι κοινωνίες μας γίνονται ολοένα και πιο πολυπολιτισμικές. Εξοικειώνει τους νέους με πολιτικές έννοιες και δομές καθώς και με το καθήκον της ενεργού και δημοκρατικής συμμετοχής.

**Στην ενίσχυση της απασχόλησης:** ίσως ο καλύτερος τρόπος για να αποκτήσετε τις οριζόντιες δεξιότητες που απαιτεί η αγορά εργασίας. Όπως κριτική και δημιουργική σκέψη, ανάληψη πρωτοβουλιών, επίλυση προβλημάτων, επικοινωνιακή διαχείριση συναισθημάτων και ανθεκτικότητα.

**Στη δημιουργία πιο ανθρώπινων κοινωνιών**, καθώς φέρνει τους ανθρώπους πιο κοντά καθιστώντας έτσι μια ισχυρή δύναμη στη διαμόρφωση της ανθρώπινης συμπεριφοράς. Χτίζει με αυτό τον τρόπο την ενσυναίσθηση η οποία βοηθά στην κατανόηση τόσο της νοοτροπίας όσο και των συναισθημάτων άλλων ανθρώπων. Αυτή η ικανότητα αυξάνει με τη σειρά της την ευαισθητοποίηση των ανθρώπων, καταπολεμώντας έτσι τις στερεότυπες συμπεριφορές και άλλα αλληλοσυνδεόμενα φαινόμενα όπως ο εκφοβισμός, η προκατάληψη και ο ρατσισμός.

Γενικά ομιλούντες, οι μη-τυπικές μέθοδοι μάθησης βρίσκονται στο προσκήνιο στην Ευρώπη εδώ και δεκαετίες ενώ από τη δεκαετία του 1990' θεωρούνται ως η κύρια μεθοδολογία που εφαρμόζει το Συμβούλιο της Ευρώπης -μαζί με την εγγενή φιλοσοφία- σε σχέση με τα χρηματοδοτούμενα από την Ευρώπη προγράμματα για τη νεολαία.

### **Μαθαίνοντας Μαθηματικά σε μη-τυπικά εκπαιδευτικά περιβάλλοντα**

Σήμερα, μελέτες όπως αυτές των Carraher και Schliemann (2002) επιβεβαιώνουν την ιδέα ότι η διδασκαλία των μαθηματικών με μη-τυπικές μεθόδους μπορεί να θέσει τη βάση πάνω στην οποία οι σπουδαστές μπορούν πραγματικά να στηριχθούν για το χτίσιμο πιο περίπλοκων μαθηματικών γνώσεων. Οι δυο αυτοί συγγραφείς λοιπόν θεωρούν ότι οι μη-τυπικές δραστηριότητες οι οποίες γίνονται εντός της τάξης πρέπει να επιτρέπουν στους μαθητές να πειραματίζονται πάνω σε μια πληθώρα μαθηματικών καταστάσεων, εργαλείων και εννοιών που καθιστούν σαφείς τους δεσμούς μεταξύ των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή και εκείνων που αναπτύσσονται μέσα στην τάξη.

Μέσω των μη-τυπικών Μαθηματικών, οι μαθητές βρίσκονται στην καρδιά της διαδικασίας μάθησης. Ανακαλύπτουν, χειρίζονται και μοντελοποιούν. Μπορεί να βασίζονται τόσο στην ατομική αλλά και στην ομαδική μάθηση, ως μέρος μιας συνολικής συλλογικής προσέγγισης. Είναι συμμετοχικά και μαθητοκεντρικά και βασίζονται στη δράση και την εμπειρία.

Επομένως, η μη-τυπική διδασκαλία μαθηματικών μπορεί να απομυθοποιήσει τα ίδια τα μαθηματικά για να δώσουν μια γεύση από πολύ νεαρή ηλικία και ως εκ τούτου να ενθαρρύνουν τα «STEM» (Επιστήμη, Τεχνολογία, Μηχανική και Μαθηματικά) στο να συμβάλουν στην οικονομική ανάπτυξη των χωρών μας.

## ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΓΙΑ ΕΚΜΑΘΗΣΗ ΣΕ ΜΗ-ΤΥΠΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

### Τι αποτελεί ένα εκπαιδευτικό εργαλείο;

Όπως θα δούμε και αργότερα, η κατανόηση του τι πραγματικά εννοούμε με την έννοια των «μη-τυπικών μεθόδων» είναι αρκετά δύσκολη αν γίνεται μόνο εστιάζοντας απλώς στο σαφή ορισμό της. Στην πραγματικότητα είναι ευκολότερο να επιχειρήσουμε να κατανοήσουμε αυτές τις «μη τυπικές μεθόδους» στην πράξη, μέσα από τα χαρακτηριστικά τους, έχοντας παράλληλα υπόψιν ότι ο διαχωρισμός τους μπορεί να γίνει σε τέσσερις κατηγορίες:

- Οι μέθοδοι που εστιάζουν στην επικοινωνία, και βασίζονται την αλληλεπίδραση, το διάλογο και τη μεσολάβηση.
- Οι μέθοδοι που εστιάζουν στη δραστηριότητα και βασίζονται την εμπειρία, την πράξη και τον πειραματισμό.
- Οι μέθοδοι που εστιάζουν στα κοινωνικά θέματα και βασίζονται στη συνεργασία, την ομαδικότητα και στη δικτύωση.
- Οι αυτοελεγχόμενες μέθοδοι βασισμένες τη δημιουργικότητα, την ευρηματικότητα και την ανάληψη ευθυνών.

[Πηγή: Συμπόσιο του Συμβουλίου της Ευρώπης για τη μη-τυπική εκπαίδευση: Έκθεση (2001)].

Συνεπώς, εάν ο εκπαιδευτικός/δάσκαλος/εκπαιδευτής σκοπεύει να χρησιμοποιήσει μία ή ακόμα και ένα συνδυασμό από τις πιο πάνω μη-τυπικές μεθόδους προκειμένου να διευκολυνθεί η διδασκαλία μίας μαθηματικής έννοιας, πρέπει πρώτα απ' όλα να σχεδιάσει ένα ολοκληρωμένο εκπαιδευτικό εργαλείο το οποίο θα αποτελείται κατά βάση από μη-τυπικές μεθόδους.

Για το λόγο αυτό, θεωρούμε σημαντικό τώρα να εξηγήσουμε τι είναι ένα εκπαιδευτικό εργαλείο, πως το αναγνωρίζουμε και ποια κριτήρια πρέπει να ικανοποιούνται. Επομένως, μετά την επεξήγηση των θεωρητικών εννοιών, σε συνδυασμό με τα τρία αναλυτικά παραδείγματα μαθηματικών εργαλείων (ένα για κάθε ξεχωριστή ηλικιακή ομάδα) που αποτελούνται από μη-τυπικές μεθόδους εκπαίδευσης ο εκπαιδευτικός/εκπαιδευτικός εκπαιδευτής που ασχολείται με τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών πρέπει να είναι ικανός να σχεδιάσει και να κατασκευάσει τα δικά του μαθηματικά εργαλεία για μάθηση.

Αρχικά πρέπει να αναφερθεί ότι ένα εκπαιδευτικό εργαλείο είναι πάνω απ' όλα ένα μέσο το οποίο μπορούμε από τη μια να το συνδέσουμε με μία προσέγγιση και από την άλλη κάτι το οποίο αναπτύσσεται για να διευκολύνει τη διαδικασία μάθησης. Με άλλα λόγια, θα μπορούσε να θεωρηθεί επίσης ως το μέσο το οποίο δημιουργείται βάση μιας μεθοδολογικής και εκπαιδευτικής προσέγγισης, και έχει ως πρωταρχικό στόχο να βοηθήσει το «κοινό» στην κατανόηση, εκμάθηση και καλύτερη απορρόφηση της νέας γνώσης.

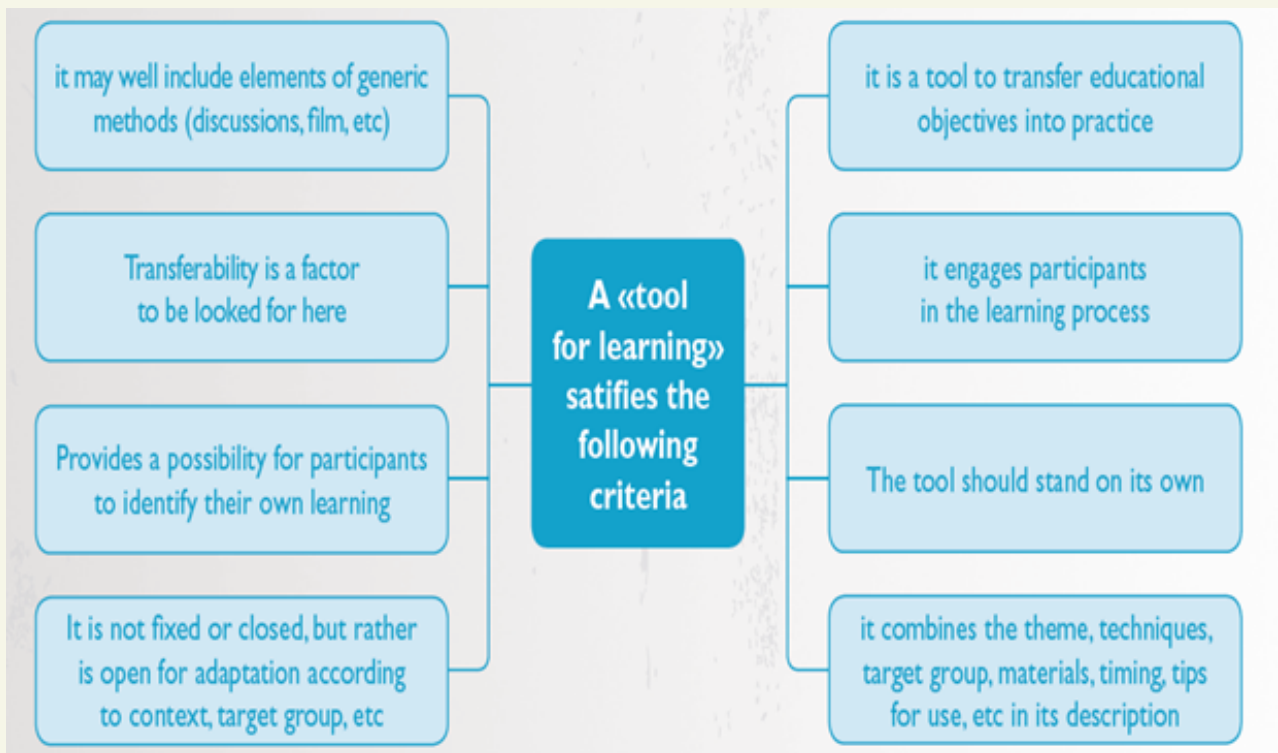
Επομένως, ένα εκπαιδευτικό εργαλείο μεταφέρει την ικανότητα να μετατρέψει σαφείς εκπαιδευτικούς στόχους από τη θεωρία στην πράξη, εμπλέκοντας παράλληλα ενεργά την «ομάδα στόχευσης» της εκάστοτε εκπαιδευτικής διαδικασίας. Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά ενός εργαλείου είναι ότι πρέπει να είναι αυτοτελές. Δηλαδή, πρέπει να είναι μια πλήρως ολοκληρωμένη διαδικασία -ακόμη και είναι κάτι σύντομο- η οποία να μη χρειάζεται άλλες πρόσθετες λεπτομέρειες για να μπορεί να βγάλει νόημα.

Το γεγονός αυτό όμως, ότι δηλαδή το εργαλείο πρέπει να είναι αυτοτελές, δε σημαίνει κατ' ανάγκη ότι πρέπει να παραμένει πάντα αμετάβλητο. Τουναντίον, ένα εκπαιδευτικό εργαλείο πρέπει να είναι ευμετάβλητο και αρκετά ανοιχτό, κατά τρόπο που να μπορεί, αφού προσαρμοστεί αναλόγως, να χρησιμοποιείται σε διάφορα πλαίσια. Δίδοντας πάντοτε τη δυνατότητα να προσαρμόζεται, να συνδυάζεται αλλά και να αναπτύσσεται περαιτέρω ανάλογα με τις πραγματικές συνθήκες και το περιβάλλον στο οποίο εφαρμόζεται. Αυτό το εγγενές χαρακτηριστικό -το οποίο παράλληλα αποτελεί και ένα από τους βασικούς του στόχους- του εκπαιδευτικού εργαλείου ονομάζεται «δυνατότητα μετάβασης».

Δεν πρέπει να ξεχνάμε επίσης ότι ένα εκπαιδευτικό εργαλείο συνδυάζει διάφορες μη-τυπικές μεθόδους οι οποίες μπορεί να βασίζονται είτε στην επικοινωνία, στις δραστηριότητες, σε κοινωνικά ζητήματα ή ακόμη να είναι και αυτό-κατευθυνόμενες. Τέτοια εργαλεία μάθησης μπορεί να έχουν τη μορφή άσκησης προσομοίωσης, παιχνίδι ρόλων, εκπαιδευτικό εργαστήριο που να ενθαρρύνει τη δημιουργικότητα χρησιμοποιώντας εικονικά ή και φανταστικά χαρακτηριστικά ή μια δραστηριότητα σε εξωτερικό χώρο. Ένα εκπαιδευτικό εργαλείο μπορεί επίσης να είναι ένα παιχνίδι, ένα διαδραστικό βίντεο, μια ιστορία, μια συζήτηση, μια παραγωγή, μια φωτογραφία ή εικόνα συνοδευόμενη από ένα κείμενο. Μπορεί επίσης να είναι και ένας συνδυασμός όλων αυτών που έχουν αναφερθεί πιο πάνω τοποθετούμενα πάντοτε σε μια λογική σειρά και με τρόπο που να διευκολύνει στην πράξη τη μαθησιακή εμπειρία.

## Αρχές δημιουργίας ενός εργαλείου μάθησης στη μη-τυπική εκπαίδευση

Όπως προκύπτει από την προηγούμενη παράγραφο, ένα εκπαιδευτικό εργαλείο στη μη-τυπική εκπαίδευση διακρίνεται από συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, τα οποία υπόκεινται σε ορισμένα κριτήρια. Αυτά τα «κριτήρια» ή αρχές στις οποίες ένα εργαλείο πρέπει να υπακούει, παρουσιάζονται στο ακόλουθο διάγραμμα.



Πηγή: Συμβούλιο της Ευρώπης, Συμπόσιο για τη Μη-Τυπική Εκπαίδευση: Έκθεση (2001)

In accordance with the diagram, a good tool for learning in Non-formal education must combine all of the eight criteria at the same time. Consequently, when the educator/trainer/ teacher intends to create his own educational tools, he could use the previous diagram as a checklist in order to be certain that his tool is a successful one, inasmuch as its construction is based on valid and objective principles.

Επιπλέον, ορισμένα άλλα σημεία τα οποία πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη διαδικασία δημιουργίας ενός εκπαιδευτικού εργαλείου μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- Ένα εργαλείο πρέπει να έχει νόημα.
- Να είναι εύχρηστο και ευπρόσιτο για όλους (ή για τη συγκεκριμένη ομάδα-στόχος για την οποία έχει δημιουργηθεί), χωρίς να αποκλείεται κανείς από τη διαδικασία μάθησης.
- Πρέπει να είναι γραμμένο σε ακριβή γλώσσα και πρέπει να μεταδίδει σαφή μηνύματα με ζωηρό τρόπο.
- Πρέπει να διευκολύνει τις διαδικασίες προσθήκης πληροφοριών, τροποποίησης και προσαρμογής.
- Πρέπει να είναι δυναμικό και ελκυστικό, εστιάζοντας παράλληλα σε διαδραστικές διαδικασίες.
- Το εργαλείο πρέπει το ίδιο να είναι ισορροπημένο αλλά και να προάγει την έννοια της ισορροπίας, εξυπηρετώντας ταυτόχρονα τόσο την ατομικότητα όσο και τη συλλογικότητα.
- Πρέπει επίσης να προκαλεί τους μαθητές να πιέσουν τα όριά τους, και να βγουν εκτός της ζώνης άνεσης τους, χωρίς όμως να φαίνεται τρομακτικό ή απρόσιτο.
- Το εργαλείο πρέπει να προσκαλεί το συμμετέχοντα να ταξιδέψει σε οποιοδήποτε χώρο διαμέσου της φαντασίας και της δημιουργικότητας.
- Ένα εργαλείο πρέπει να εξυπηρετεί την ιδέα του 'μαθαίνω πράττοντας'.



## Διδακτικά βοηθήματα, Μέσα και Τεχνικές

Κατά τη διαδικασία κατασκευής ενός εκπαιδευτικού εργαλείου, ο εκπαιδευτικός / δάσκαλος / εκπαιδευτής πρέπει να έχει κατά νου μια συγκεκριμένη μεθοδολογία που θα ακολουθήσει, με σαφή βήματα, τα οποία πιθανώς θα υπηρετούν στο ακόλουθο σχέδιο:

Τίτλος / Εύρος ηλικίας ή Ομάδα-στόχευσης/ Διάρκεια / Μαθηματικές έννοιες με τις οποίες το εργαλείο ασχολείται / Γενικός Στόχος / Σκοπός / Οδηγίες χρήσης (διαδικασία βήμα-με -βήμα) / Υλικά και Πηγές / Μέσα / Μέθοδοι και Τεχνικές / Συμβουλές προς τον εκπαιδευτή / Επιθυμητά Αποτελέσματα και Ικανότητες / Απολογισμός / Ερωτήσεις για αξιολόγηση.

Συνεπώς, εκπαιδευτής πρέπει πρωτίστως να καθορίσει τις μαθηματικές έννοιες με τις οποίες το εργαλείο θα ασχολείται και ακολούθως να λάβει τις τελικές αποφάσεις σχετικά με το *Γενικό Σκοπό* και τους *Στόχους* του εργαλείου. Αφού τα κάνει όλα αυτά πρέπει να είναι έτοιμος να καταγράψει τις οδηγίες χρήσης δίνοντας με αναλυτικά, *βήμα-βήμα* τη διαδικασία. Όμως είναι σημαντικό, προτού ακόμη ολοκληρωθεί αυτή η διαδικασία, ο εκπαιδευτικός / δάσκαλος / εκπαιδευτής να μπορεί να καθορίσει τα *διδακτικά βοηθήματα* τα οποία σκοπεύει να χρησιμοποιήσει. Αναφερόμενοι σε διδακτικά βοηθήματα εννοούμε εκείνα τα μέσα και τις τεχνικές που θα τον στηρίζουν κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας και τα οποία θα περιλαμβάνονται στο σχεδιασμό και την κατασκευή του εργαλείου. Σε αυτό το σημείο, είναι σημαντικό σημειώσουμε ότι, συχνά, με τον τρόπο που δίδονται τα *Μέσα* μπλέκονται με μία ή και περισσότερες *Τεχνικές*. Με άλλα λόγια, δεν είναι πάντοτε εφικτός ο διαχωρισμός των *Μέσων* από τις αντίστοιχες *Τεχνικές*.

Λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, ακολουθεί μια λίστα με τα πιο πολυχρησιμοποιημένα Μέσα και τις Τεχνικές:

TEACHING SUPPORT OR AID:	MEDIA	TECHNIQUE	MIXED MEDIA AND TECHNIQUES
	White board or Paperboard	Use of White Board or Paperboard in order to present, observe and/ or summarize a new knowledge etc.	
	Computer	Use of Computer in order to present data, to complete a task, to conduct research on a topic, to use a specific program etc.	
	E-Video	The projection of an E-Video in order to give information on a topic or a concept. It could be a documentary, a film etc.	
	Video Projector	Use of Video Projector in order to facilitate the process of a video presentation.	
	Book	Use of a Book in order to say a story, to introduce a new concept, to give new knowledge, to provide historical or other features, to cultivate a positive stance towards a topic or a concept, to cultivate imagination, to broaden the field of knowledge, etc.	
	Photos or Pictures with or without Text	Use of photos in order to convey a vivid message, to represent a concept or a task, to give explanatory information, to make the instructions more precise, etc.	
	Graphs, Tables, Diagrams, Maps	Use of Graphs, Tables, Diagrams and Maps in order to depict information, to provide features in a more readable way, to map an order of information.	
	Graphics	Use of Graphics in order to make the presentation of other Media more attractive, to add meaning in a text, etc.	
			Games: To learn easily, to absorb a new concept, to show the applicability of a concept, to cultivate a positive stance towards a concept, etc.
			Stories/Storytelling: To introduce a new concept, to give new knowledge, to provide historical or other features, to cultivate a positive stance towards a topic or a concept, to

			<p>cultivate imagination, to broaden the field of knowledge, etc.</p> <p>Case Study: To provide a new knowledge through giving a concrete example, to add new possible methods of making a research, to learn how a theory is being applied, etc.</p> <p>Simulation Exercise (such as Role-Play): to introduce and absorb a knowledge within a creative way, to put one in a position of another person, to cultivate empathy and compassion, etc.</p> <p>Group Discussions and Presentations: To urge the exchange of opinions and knowledge, to learn how to raise good argumentation, to work on communication skills, to build-up one's own methodology in discovering and presenting something, to learn how to make research related to a specific topic, to learn how to put the things down in well-organized way</p>
--	--	--	---

Table: Teaching Support or Aid; Media and Techniques

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΜΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΗ-ΤΥΠΙΚΩΝ ΕΡΓΑΛΙΩΝ, ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΕΝΣΩΜΑΤΩΘΟΥΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΗΜΗ ΥΛΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «INFORMATH» ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΘΗΚΕ ΑΠΟ ΤΗΝ Ε.Ε.

Σε αυτό το σημείο, παραθέτουμε στον αναγνώστη ένα πολύ καλό παράδειγμα μη-τυπικού εργαλείου, με το όνομα «The Warrior Student: An adventure in Calculus» (Ο Φοιτητής Πολεμιστής: Μια Περιπέτεια στο Λογισμό), το οποίο δημιουργήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος του Erasmus+ 'Informath'. Το συγκεκριμένο αυτό εργαλείο αποτελεί ένα παιχνίδι-βιβλίο το οποίο βοηθά μαθητές (από 16 έως 18) να δοκιμάσουν τις δυνατότητές τους στην ανάλυση λειτουργιών.

#### **«The Warrior Student: An adventure in Calculus» (Ο Φοιτητής Πολεμιστής: Μια Περιπέτεια στο Λογισμό)**

#### **Εύρος Ηλικίας – Ομάδα Στόχος**

Το εύρος ηλικίας των εκπαιδευομένων είναι μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μεταξύ 16-18 χρόνων, οι οποίοι θα πρέπει να έχουν διδαχθεί το λογισμό και να έχουν μελετήσει τις αντίστοιχες λειτουργίες.

#### **Διάρκεια**

Η μέγιστη διάρκεια του παιχνιδιού του παιχνιδιού είναι τα 30 λεπτά, αναλόγως των δυνατοτήτων των μαθητών στο λογισμό.

#### **Μαθηματικές έννοιες με τις οποίες το εργαλείο καταπιάνεται**

Το παιχνίδι καταπιάνεται με μαθηματικές έννοιες και λειτουργίες, γραφήματα, μονοτονικότητα, διαφοροποίηση, σημάδι λειτουργίας, ακρότητες και κοιλότητες.

#### **Γενικός Στόχος-Σκοπός**

Το κόμικ «Φοιτητής Πολεμιστής» είναι ένα παιχνίδι-βιβλίο το οποίο βοηθά τους μαθητές να δοκιμάσουν τις ικανότητές τους στην ανάλυση λειτουργιών. Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού αυτού, οι μαθητές έχουν να αναλύσουν μια λειτουργία. Η ανάλυση χωρίζεται σε διάφορα στάδια. Πολλά κοινά και βασικά λάθη στη μελέτη της λειτουργίας είναι ενσωματωμένα μέσα στην ιστορία. Επομένως, αυτά τα λάθη μπορούν να αποφευχθούν από τους μαθητές, αφού θα μπορούσαν να τα απεικονίσουν σε μια μαθηματική-περιπέτεια η οποία να είναι εύκολο να απομνημονευτεί. Με αυτό το κόμικ, οι μαθητές αναλύουν τις μαθηματικές λειτουργίες με ένα διασκεδαστικό τρόπο.

## Κοινωνικές δεξιότητες σχετικές με το παιχνίδι

Επίλυση προβλημάτων, αυτοπεποίθηση, λήψη αποφάσεων.

### Υλικά και Πηγές

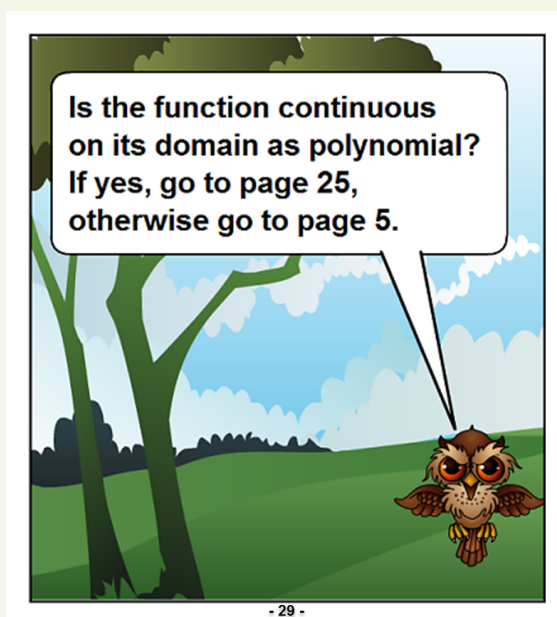
Το κόμικ «Φοιτητής Πολεμιστής» είναι ένα μικρού-μεγέθους βιβλίο 44 σελίδων σε μορφή βιβλιαρίου. Κάθε μαθητής ο οποίος συμμετέχει στην περιπέτεια αυτή θα πρέπει να έχει στη διάθεσή του ένα μολύβι και ένα χαρτί, για να απαντήσουν τις ερωτήσεις και τα διλήμματα του κουίζ.

### Διαδικασία βήμα-βήμα

#### Γενικά, για το βιβλίο:

Το σενάριο της μαθηματικής αυτής περιπέτειας ξεδιπλώνεται σε δύο παράλληλους κόσμους. Στον ένα κόσμο, ο αναγνώστης μπαίνει στο ρόλο του φοιτητή ο οποίος καλείται να επιλύσει μια άσκηση. Στον άλλο κόσμο ο αναγνώστης γίνεται πολεμιστής σε μια περιπέτεια. Κάθε συμμετέχοντας στην περιπέτεια πρέπει πρώτα να διαβάσει το κόμικ και να λύσει σωστά τους γρίφους / τα διλήμματα / τα προβλήματα. Ανάλογα με την απάντηση που δίδει ο μαθητής σε κάθε στάδιο, το κόμικ κατευθύνει τον αναγνώστη στην αντίστοιχη σελίδα στην οποία ο μαχητής είτε χάνει είτε κερδίζει. Έτσι, ο αναγνώστης, έχοντας το ρόλο του μαθητή, ακολουθήσει σωστά τα βήματα τα οποία θα τον οδηγήσουν στη λύση τότε και ο μαχητής ανταποκρίνεται θετικά στις δοκιμές. Αν αντίστοιχα κάνει λάθη, τότε και ο μαχητής αντιμετωπίζει προβλήματα στην περιπέτεια.

Σε κάθε λάθος κίνηση αφαιρούνται βαθμοί ενέργειας, οι οποίοι στο αρχικό στάδιο είναι πέντε. Οι μαθητές μπορεί να χάσουν μετά από πολλά λάθη τα οποία τους αφαιρούν βαθμούς. Κατά τη διάρκεια της περιπέτειας υπάρχει και μια κουκουβάγια η οποία εκτελεί χρέη βοηθού και εκπαιδευτή (εικόνα 1).



Εικόνα 1: Η κουκουβάγια δίνει τις οδηγίες στο μαθητή.

Στην ιστορία όπου ο αναγνώστης παίρνει το ρόλο του μαθητή, καλείται να μελετήσει και να σχεδιάσει μια μαθηματική εξίσωση (εικόνα 2).

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - x}$$

Εικόνα 2. Η εξίσωση την οποία ο μαθητής καλείται να μελετήσει.

Στην ιστορία όπου ο αναγνώστης παίρνει το ρόλο του μαθητή, καλείται να μελετήσει και να σχεδιάσει μια μαθηματική εξίσωση (εικόνα 2).



Εικόνα 3. Η αντίπαλη ομάδα των Αντιθετικών,

Αν ο πολεμιστής ολοκληρώσει επιτυχώς την περιπέτεια χωρίς να χάσει όλους τους πόντους ενέργειας του, τότε ο φοιτητής-πολεμιστής κερδίζει.

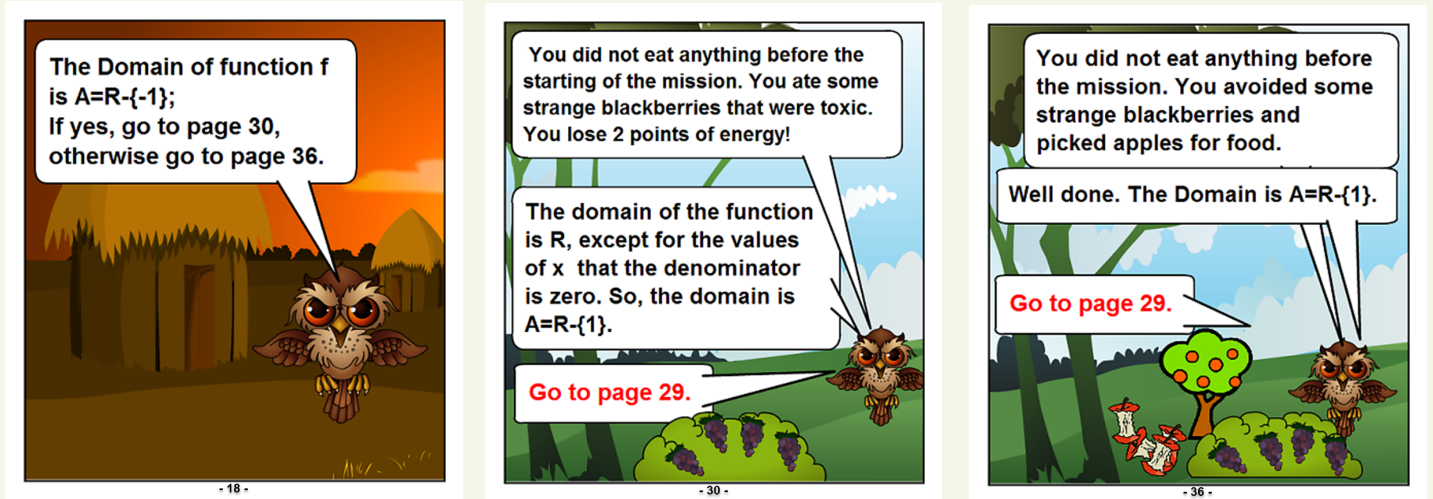
Η περιπέτεια του κόμικ ξεδιπλώνεται από τη μια σελίδα στην άλλη, όχι όμως σε μια διαδοχικά αριθμημένη σειρά.

Το παιχνίδι είναι κατά κανόνα ατομικό αλλά μπορεί να ακόμη να το παίξουν και μαθητές σε ομάδες των δύο.



## Μια υποθετική περίπτωση παιχνιδιού

Ας κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση: ο αναγνώστης βρίσκεται στη σελίδα 18 και πρέπει να βρει το πλαίσιο της συνάρτησης. Η κουκουβάγια ορίζει το πεδίο ορισμού ως  $A=R-\{-1\}$ . Αν ο αναγνώστης καταφέρει να ορίσει το ίδιο πεδίο ορισμού στη συνάρτηση τότε θα συνεχίσει στη σελίδα 30, διαφορετικά θα συνεχίσει στη σελίδα 36 (εικόνα 4).



Εικόνα 4: Δίλημμα, μια κακή και μια καλή εξέλιξη στην αποστολή.

Επομένως, εάν ο μαθητής κάνει λάθος επιλογή και πάει στη σελίδα 30, ο πολεμιστής θα αντιμετωπίσει προβλήματα. Αντιθέτως αν ο μαθητής κάνει τη σωστή επιλογή και πάει στη σελίδα 36, τότε και ο πολεμιστής θα συνεχίσει αλώβητος.

## Διδακτικές Μέθοδοι και Τεχνικές

Το παιχνίδι αυτό βασίζεται σε μια κατηγορία βιβλίων, τα επονομαζόμενα 'παιχνιδοβιβλία περιπέτειας'. Σε αυτή την εκδοχή του βιβλίου, ο εκπαιδευτικός προσέθεσε έναν παράλληλο κόσμο, τον κόσμο του μαθητή ο οποίος αναλόγως με τις απαντήσεις που δίνει, επηρεάζει τον κόσμο ενός πολεμιστή. Επίσης αντί ενός απλού κειμένου, η πλοκή αναπαρίσταται από κόμικς (χρησιμοποιώντας τη διαδικτυακή πλατφόρμα «toonDOO»).

Οι μέθοδοι και τεχνικές διδασκαλίας οι οποίες εφαρμόζονται.

- Ανάγνωση
- Ατομική εξεύρεση λύσεων
- Παιχνίδι
- Ατομική εξέλιξη της ιστορίας αναλόγως των επιλογών του μαθητή,
- Χρήση γραφικών και κόμικ
- Ανταμοιβή για κάθε σωστή απάντηση και αντίστοιχα επεξηγήσεις όταν υπάρχει λανθασμένη απάντηση.
- Εστίαση σε συχνά και βασικά λάθη με προσπάθεια απεικόνισης τους με ένα γραφικό και μια αξιομνημόνευτη εικόνα

## Συμβουλές προς τον εκπαιδευτικό

Μελλοντικά, καλό θα ήταν να διανθίσουμε την ιστορία του κόμικ με περισσότερο κείμενο, αφήγηση και μια καλύτερη ιστορία η οποία θα μπορεί να ενισχύσει τη φαντασία των μαθητών. Στα πλαίσια ενός εκπαιδευτικού έργου των μαθητών, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα κωμικό παρόμοιο με το «Πολεμιστή-Μαθητή», χρησιμοποιώντας λογισμικό για κόμικς (το 'toonadoo' ή άλλο).

## Ερωτήσεις για αξιολόγηση

Η αξιολόγηση είναι απαραίτητη για τη βελτίωση του μαθηματικού αυτού παιχνιδιού.

Πιθανές ερωτήσεις προς τους μαθητές είναι οι ακόλουθες:

Σας αρέσει η ιστορία του πολεμιστή-μαθητή;

Το βρήκατε δύσκολο να περιηγηθείτε στο περιεχόμενο του κόμικ;

Πιστεύεται ότι σας βοήθησε το ότι είδατε τα μαθηματικά από μια διαφορετική οπτική γωνιά;

Τέλος, προτιμάτε μια τυπικού τύπου άσκηση ή μια άσκηση τέτοιου τύπου με κόμικ;

## Πηγές

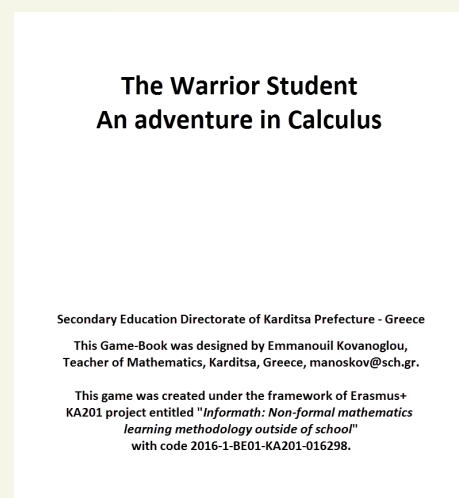
Όλες οι εικόνες από το κόμικ έγιναν μέσω της ιστοσελίδας

<http://www.toondoo.com/>

Τα γραφήματα έγιναν μέσω του Geogebra.

Το φόντο του τίτλου έγινε μέσω της ιστοσελίδας [www.cooltext.com](http://www.cooltext.com).

## Υλικό (σελίδες από το βιβλιαράκι)



You are a warrior student and you participate in a mathematical adventure. Your mission is to study, analyze and sketch the curve of the function:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - x}$$

- You will have to deal with the Contrapositive team.
- This group consists of Ninja Osho, the Caveman, the Gorilla Iverne and the Big Snake.
- The four enemies will try to stop you.
- Beware!

- To succeed in your mission, you must follow several stages.
- Caution, because any wrong choice reduces the points of energy and you may lose.
- Your initial points of energy are five.
- We're starting the mission!
- Write on the paper the points of energy that you start with.
- The paper will also be used for solving and answer to queries.
- Go to page 4.

Will you solve the  $x^2 + x - 1 = 0$  or manage the  $1-x$ ;

If you solve the first go to page 14, otherwise go to page 38.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - x}$$

Ninja Osho was hidden behind the only bush in the area. You were prepared and he was defeated.

Right! Function  $f$  is continuous as rational.

The next time you will not see me.

Go to page 17.

It was a cloudy night. It was easy for Osho to attack you. You lose one energy point.

Beware! It is true that  $-5 < -1$ , but there is a relative minimum at  $x=0$  the  $f(0)=-1$  and a relative maximum at  $x=2$  the  $f(2)=-5$ .

This battle was mine.

Go to page 26

Big Snake guarded and bite you. You ran away but you lose power.

$$f'(x) = \frac{(2x^2+1)(1-x) - (x^2+x-1)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2} \text{ or } -\frac{x(x-2)}{(1-x)^2}$$

You lose one point of energy.

Go to page 9.

The Big Snake took the opportunity and hit you with the tail. You lose one energy point.

The table is correct.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	
$f(x)$			

Contrapositive rules!

Go to page 16.

- You must find the sign of derivative.
- Does the sign depend on the numerator or denominator?
- If you choose the numerator go to page 35.
- If you choose the denominator go to page 20.

In general, the sign of  $f'$ ...

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ or } x = +2$$

In general, what will be the the sign of  $f'(x)$ ?

- If the signs are -+|- go to page 31.
- If the signs are +|- go to page 12.

- 11 -

Yverne attacked you!  
You lose one point of energy.

Wrong!  
The sign of  $f'$  is -+|-

Go to page 33.

- 12 -

You made a big feline with Shadow Hand magic.  
Big Snake vanished into thin air.

The table is correct.

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$			

Go to page 16

- 13 -

You forgot to find the domain of the function and so the results will be fictitious and probably wrong.  
You also needlessly waste time on something you were not asked for.

You were completely careless and the Gorilla attacked you with a sign and you lost

You lose one energy point!  
Go to page 18!

- 14 -

It was night but with a bright moonlight.  
So, it was easy to avoid him.

Right! There is relative minimum at  $x=0$  the  $f(0)=-1$  and relative maximum at  $x=2$  the  $f(2)=-5$ .

Next time!

Go to page 26.

- 15 -

You should find the horizontal asymptotes of the function  $f$ .  
I remind you that  $A = \mathbb{R} - \{1\}$ .

- If there is at least one horizontal asymptote go to page 19,
- otherwise go to page 34.

- 16 -

- We will find the derivative of  $f$ .
- The function  $f$  is differentiable as rational.
- Find  $f'(x)$ .

- Go to page:

- 10 if  $f'(x) = \frac{-x^2+2x}{1-x}$
- 22 if  $f'(x) = -\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$
- 7 if  $f'(x) = \frac{-3x^2+2}{(1-x)^2}$

- 17 -

The Domain of function  $f$  is  $A=\mathbb{R}-\{-1\}$ ;  
If yes, go to page 30,  
otherwise go to page 36.

- 18 -

Wrong! There is no horizontal asymptote, because

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 1}{1 - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{-1} = \mp\infty$$

The Caveman chased you for a long time.  
You lose time and energy.

You lose one energy point.  
Go to page 37.

- 19 -



The hits with the bat gave you some pretty good bumps! You lose a point of energy.

Wrong! Its whole denominator is square. So, the denominator is always positive on A.

You lose a point of energy. Go to page 11.

- 20 -

Right! There is a slant asymptote, the  $y=-x-2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{-2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 + x - 1}{1 - x} + x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

Took advantage of the echo of the cave and made the enemy loopy.

Go to page 40.

- 21 -

Big Snake guarded. You defended with brimstone that you had in your pouch.

$$f'(x) =$$

$$= \frac{(2x^2+1)(1-x) - (x^2+x-1)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2} \text{ or } -\frac{x(x-2)}{(1-x)^2}$$

The next time you sssshall ssssee.

Go to page 9.

- 22 -

You should find the slant asymptotes of the function f. I remind you that  $A = \mathbb{R} - \{1\}$ .

- If there is at least one slant asymptote go to page 21,
- otherwise go to page 39.

- 23 -

Right! There are vertical asymptotes, because

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 1}{1 - x} = +\infty$$

The caveman went to grab you, but you beat him off with a burning torch! You did it again!

Go to page 23.

- 24 -

Ninja Osho was hidden behind the only bush in the area. You did not see him and he hit you. He almost gave you the final hit.

Wrong! Function f is continuous as rational.

You lose 1 point of energy. Go to page 17.

- 25 -

The table of monotonicity and extrema of f is:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	+	0
f(x)	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\nearrow$	-5

$l.min. (0;-1)$        $l.max. (2;5)$

Go to next page.

- 26 -

$$f''(x) = \frac{-2}{(1-x)^3}$$

Go to next page.

- 27 -

The table of signs of f' is:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	+		-

Add the line of concavity.

If the table of concavity is:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''(x)	+		-
f(x)			

- go to page 13,
- otherwise go to page 8.

- 28 -

Is the function continuous on its domain as polynomial? If yes, go to page 25, otherwise go to page 5.

- 29 -

You did not eat anything before the starting of the mission. You ate some strange blackberries that were toxic. You lose 2 points of energy!

The domain of the function is  $\mathbb{R}$ , except for the values of  $x$  that the denominator is zero. So, the domain is  $A = \mathbb{R} - \{1\}$ .

Go to page 29.

- 30 -

Yverne was trying to attack you, but you tricked the Gorilla with a banana.

Well done! The sign of  $f'$  is  $-|+|$ .

Yum, yum!! Go to page 33.

- 31 -

Wrong! There are vertical asymptotes, because

$$\lim_{x \rightarrow 1^{\pm}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^{\pm}} \frac{x^2 + x - 1}{1 - x} = \mp \infty$$

The caveman caught you. This time you were too slow.

You escaped, but you lose an energy point! Go to page 23.

- 32 -

The table of signs of  $f'$  is

$x$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-

Add to the table:

- the line of function's monotonicity and
- the extrema of  $f$ .

If  $f$  has a local minimum the -5 go to page 6, otherwise go to page 15.

- 33 -

Right! There is no horizontal asymptote, since

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-1} = \mp \infty$$

The Caveman chased you for a long time. You temporarily blinded him with a powerful flashlight! You did it again!

Go to page 37.

- 34 -

The hits with the bat gave you only one very small bump! That's way your friends used to call you a powerful brain.

Right! Its whole denominator is square. So, the denominator is always positive on  $A$ .

Go to page 11.

- 35 -

You did not eat anything before the mission. You avoided some strange blackberries and picked apples for food.

Well done. The Domain is  $A = \mathbb{R} - \{1\}$ .

Go to page 29.

- 36 -

You should find the vertical asymptotes of the function  $f$ . I remind you that  $A = \mathbb{R} - \{1\}$ .

- If there is at least one vertical asymptote go to page 24,
- otherwise go to page 32.

- 37 -



Correctly! First of all, we are dealing with the Domain of the Function, which in this case is only depends on the denominator.

Well done! You were careful and you were avoided sign hit of the Gorilla.

You escaped this time!

Go to page 18.

- 38 -

Wrong! There is slant asymptote, that is  $y=-x-2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{-2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{x^2 + x - 1}{x - x^2} + x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

The enemy caught you because you tried to hide to his cave!

You lose an energy point. Go to page 40.

- 39 -

You've made it! The only thing left is to make the table of variations and to draw the graph of f. The table of variations is:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	+	0
f''(x)	+		+	-	-
f(x)		-1		-5	

$+\infty$  *l.min.*  $(0,-1)$   $+\infty$   $-\infty$  *l.max.*  $(2,5)$   $-\infty$   
*sl.asym.*  $y=-x-2$  *ver.asym.*  $x=1$  *sl.asym.*  $y=-x-2$

Go to next page.

- 40 -

For the drawing of graph, first we must draw the asymptotes and find the points of intersection with the axes:

Go to next page.

- 41 -

Finally! The graph of function f is

Well done! Mission accomplished!

- 42 -

## ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟ ΤΟ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΕ ΕΡΓΟ «MATHSPACES»

Ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών αρχίζουν να μαθαίνουν μαθηματικά έχοντας κατά νου ότι είναι δύσκολα, βαρετά. Εδώ και 10-15 χρόνια υπάρχει μια τάση σε όλη την Ευρώπη, η οποία προσπαθεί να αντιμετωπίσει το ζήτημα αυτό με τη δημιουργία μουσείων, κέντρων ή σπιτιών μαθηματικών τα οποία προωθούν μια μη-τυπική προσέγγιση στη διδασκαλία. Μια προσέγγιση η οποία αποδεδειγμένα έχει επίδραση στην ενίσχυση των μαθηματικών ικανοτήτων στους νέους αλλά πάνω απ' όλα στην ενίσχυση του ενδιαφέροντος τους στο μάθημα.

Ωστόσο, υπάρχουν ακόμη λίγοι τέτοιοι χώροι. Η έλλειψη περισσότερων χώρων εντοπίζεται λόγω της έλλειψης γνώσεων για αυτού του είδους την προσέγγιση και τη δυσκολία εξεύρεσης των κατάλληλων πόρων και υλικού.

Έτσι οι εταίροι του έργου 'MathSpaces' αποφάσισαν αρχικά να δημιουργήσουν ένα έργο που να στοχεύει στην αύξηση της ευαισθητοποίηση για αύξηση τέτοιων χώρων στην Ε.Ε. που να ασχολούνται με τη μη-τυπική προσέγγιση των μαθηματικών. Για να γίνει αυτό, οι εταίροι θα ήθελαν να δημιουργήσουν τα ακόλουθα:

1. Ένα βιβλιαράκι σχετικά με την αποτελεσματικότητα της μη-τυπικής προσέγγισης των μαθηματικών και ένα πρακτικό οδηγό για τη δημιουργία χώρων αφιερωμένων σε αυτή.
2. Μια βάση δεδομένων από εργαλεία, παιχνίδια, δραστηριότητες και σταθμούς διαθέσιμα στην Opensource.
3. Τις πρώτες δύο εκθέσεις μαθηματικών, οι οποίες είναι επιστημονικά και παιδαγωγικά ακριβείς. Έχουν σχέδια και οδηγίες και είναι επίσης διαθέσιμες στη σελίδα Opensource.

Το βιβλιαράκι είναι διαθέσιμο στην Αγγλική γλώσσα, στην ιστοσελίδα του έργου: <http://mathspaces.eu/>

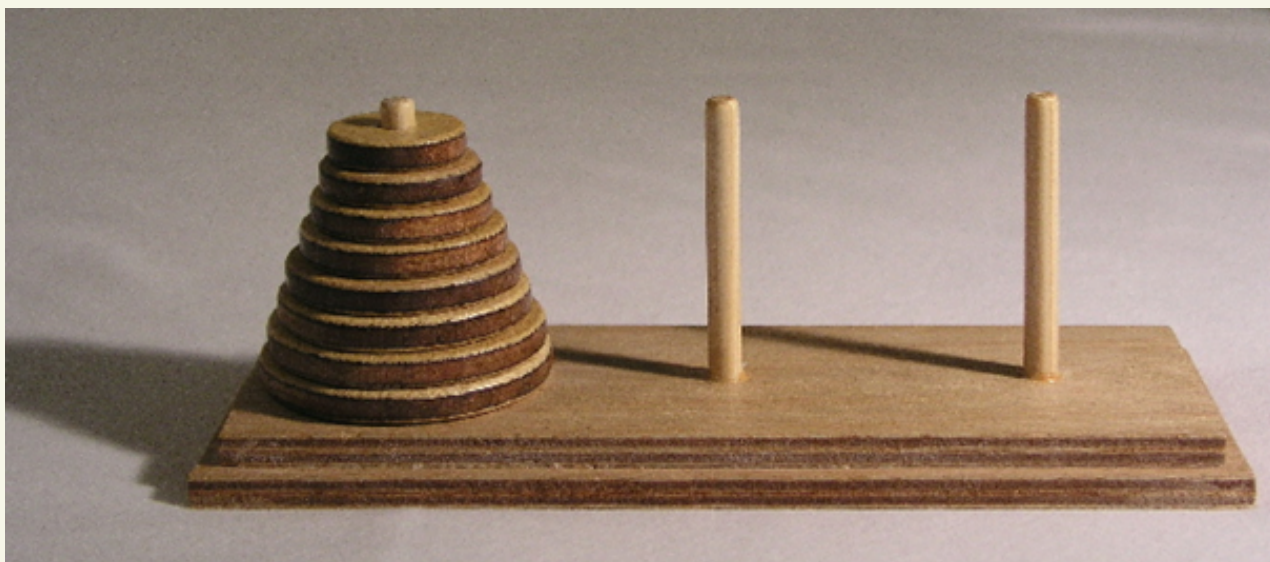
Ο οργανισμός Fermat Science, ο οποίος συντονίζει το παρόν έργο 'MathReality'. Συμμετείχε επίσης και στην ανάπτυξη του έργου 'MathSpaces'. Όσον αφορά τα άλλα εργαλεία, λόγω ορισμένων εμποδίων έχει αναβληθεί για την ώρα η δημιουργία τους, αλλά ορισμένα από τα μη-τυπικά εργαλεία που έχουν ήδη αναπτυχθεί μπορούν να αναλυθούν εδώ ως παραδείγματα.



## Σπαζοκεφαλιά και μαθηματικά

### Η πύργος του Ανόι (The Tower of Hanoi)

Μια σπαζοκεφαλιά η οποία εφευρέθηκε το 1883 από το Γάλλο μαθηματικό Έντουαρτ Λούκας (Édouard Lucas) (1842 – 1891). Ορισμένοι δίσκοι διαφόρων μεγεθών στοιβάζονται σε φθίνουσα σειρά πάνω σε μια ράβδο, έτσι που ο μεγαλύτερος βρίσκεται στον πάτο και ο μικρότερος από πάνω.



Πηγή: [https://en.wikipedia.org/wiki/Tower\\_of\\_Hanoi#/media/File:Tower\\_of\\_Hanoi.jpeg](https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi#/media/File:Tower_of_Hanoi.jpeg)

Σκοπός του παιχνιδιού είναι να μετακινήσετε αυτό το μηχανισμό σε ένα από τις ράβδους, μετακινώντας μόνο ένα κομμάτι τη φορά και χωρίς ποτέ να τοποθετήσετε ένα μεγαλύτερο δίσκο πάνω από κάποιο μικρότερο. Πρέπει να χρησιμοποιηθούν και οι τρεις ράβδοι.

### Πόσες κινήσεις;

Ο αριθμός των κινήσεων οι οποίες απαιτούνται για την επιτυχή ολοκλήρωση του Πύργου του Ανόι μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον τύπο  $2^n - 1$ . Επομένως, δύο από τους δίσκους χρειάζεται να μετακινηθούν τρεις φορές, τρεις δίσκοι χρειάζεται να μετακινηθούν επτά φορές, κλπ.

### Απόδειξη – μαθηματικά

Η απόδειξη του πιο πάνω είναι πολύ απλή με τη μέθοδο της επανάληψης

- Το αποτέλεσμα είναι πραγματικό για  $n=1$

- Υποθέστε ότι το πραγματικό αποτέλεσμα για  $n$  και επαληθεύσατε ότι ισχύει για  $n+1$ . Άρα, έχουμε  $2^n - 1$  μετακινήσεις για  $n$  αριθμό δίσκων.

Για 1 δίσκο επιπλέον, δηλαδή για  $n+1$  δίσκους, θα χρειαστεί  $2(2^n - 1) + 1$  κινήσεις,  $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1$  κινήσεις, δηλαδή  $2^{n+1} - 1$  κινήσεις.

Τέλος, το αποτέλεσμα είναι πραγματικό για 1 δίσκο. Όταν είναι πραγματικό για  $n$  αριθμό δίσκων, είναι πραγματικό για  $n+1$  δίσκους. Η επανάληψη αποδεικνύεται σωστά ως εξής: για  $n$  δίσκους, έχουμε  $2^n - 1$  κινήσεις.

## Περισσότερα – μαθηματικά

Το πρόβλημα των Πύργων του Ανόι παρατηρείται αλγοριθμικά (προγραμματισμός), όπου δίνει ένα παράδειγμα της ισχύος και της αναγνωσιμότητας των προγραμμάτων τα οποία ορίζονται αναδρομικά (ένα άλλο παρόμοιο παράδειγμα είναι η διαλογή των δέντρων).

Οι Πύργοι του Ανόι μπορούν ακόμη να αναπαρασταθούν με μια αφηρημένη γραφική παράσταση, στην οποία κάθε κορυφή αντιπροσωπεύει μια πιθανή διάταξη του  $N$  αριθμού δίσκων στους τρεις πύργους. Μια ακμή συνδέει δύο κορυφές εάν υπάρχει κίνηση του ενός δίσκου που επιτρέπει να περάσει από μια διάταξη, που αναπαριστάται από μία από της κορυφές στην άλλη.



Πηγή: Thomas Ricaud, Fermat Science

## Η συντομότερη διαδρομή

Στο έργο 'MathSpaces', το πνευματικό παραδοτέο 5 είναι μια σταθερή και επιστημονικά έγκυρη έκθεση στο Open Source, και απευθύνεται σε νέους από 9 μέχρι 15 χρόνων.

Σε αυτές τις ηλικιακές κατηγορίες, τα Μαθηματικά μπαίνουν σε μια μεταβατική περίοδο. Αρχίζουν να ίνονται πιο συγκεκριμένα, δεν ασχολούνται πλέον μόνο με παιχνίδια και βασική λογική αλλά ομοίως δεν ασχολούνται ακόμη για τις 'τεχνικές', έντονες και βαριές θεωρίες. Η διδασκαλία των μαθηματικών σε αυτή την ηλικία επικεντρώνεται στην εκμάθηση των μεγάλων θεωριών και της ιδέας πάνω στην οποία βασίζονται τα σύγχρονα μαθηματικά.

Η θεματική η οποία έχει επιλεγεί από τον εταίρο είναι 'Η συντομότερη διαδρομή'. Ο κύριος στόχος, είναι να εισαχθούν τα παιδιά σε κάποια 'ελάχιστα' προβλήματα που σχετίζονται με την καθημερινή ζωή.

*Σε ένα ανοιχτό χώρο, ο συντομότερος δρόμος που ενώνει δύο σημεία είναι μια ευθεία γραμμή. Τι συμβαίνει όμως όταν έχουμε μια σφαιρική επιφάνεια;*

*Ή όταν υπάρχει ένα παρτέρι που γράφει «Μακριά από το γρασίδι»;*

*Ή όταν έχουμε να συνδέσουμε τρία ή και περισσότερα σημεία;*

*Αυτή η έκθεση ασχολείται με τέτοιες και άλλες παρόμοιες περιπτώσεις.*

Ακολούθως θα βρείτε τις ενότητες του έργου 'MathSpaces' οι οποίες ετοιμάζονται:

### **Ενότητα 1 Γεωδημική (Geodesics)**

Στη διαφορική γεωμετρία, μια γεωδαιτική είναι η γενίκευση της έννοιας της 'ευθείας γραμμής' σε 'καμπύλες'. Ο όρος 'γεωδημική' προέρχεται από τη γεωδεσία, την επιστήμη που μετρά το μέγεθος και το σχήμα της γης. Κατά την αρχική προέλευση του όρου, γεωδεσία ήταν η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων της επιφάνειας της Γης, δηλαδή, ενός τμήματος ενός μεγαλύτερου κύκλου

Ο όρος πλέον έχει γενικευτεί ούτως ώστε να περιλαμβάνει μετρήσεις σε πολύ πιο γενικούς χώρους των μαθηματικών. Για παράδειγμα, στη θεωρία των γραφημάτων, κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει μια γεωδεσία μεταξύ δύο κάθετων κορυφών / κόμβων ενός γραφήματος.

### **Τι;**

Μπορούμε να προτείνουμε στους μαθητές μια υδρόγειο σφαίρα πάω στην οποία ο επισκέπτης θα μπορεί να πειραματιστεί στην εξεύρεση της συντομότερης διαδρομής μεταξύ διαφόρων πόλεων. Μπορούμε επίσης να προσθέσουμε και μια σκηνή από το πρόγραμμα Mappa Mundi (<https://mappaemundi.campus.ciencias.ulisboa.pt>) το οποίο έχει δυνατότητα να δείχνει χάρτες σε διαφορετικές προβολές και να σχεδιάζει γεωδεσίες μεταξύ οποιωνδήποτε δύο σημείων.geodesics between any two points.



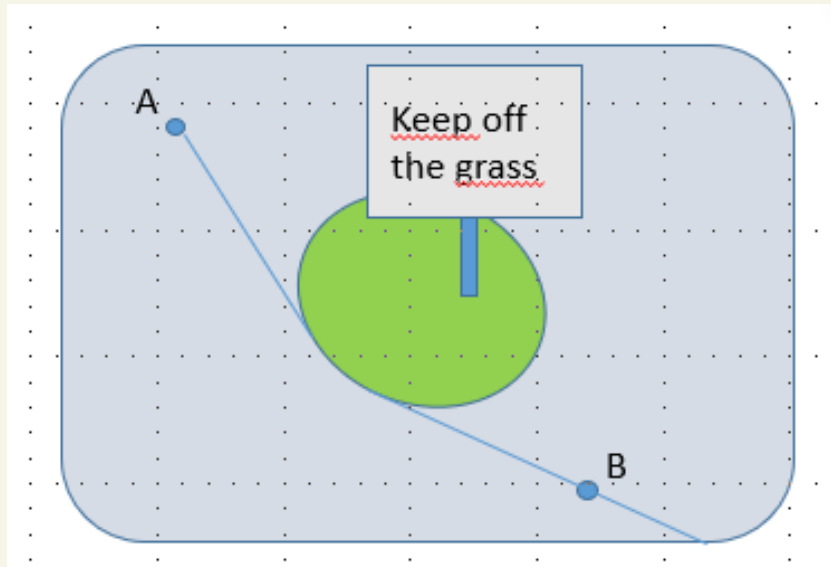


## Ενότητα 2 Ένα τετράγωνο με ένα παρτέρι

Η βέλτιστη διαδρομή είναι εφαπτόμενη του παρτεριού.

**Τι;**

Στερεώνουμε μια μετροταινία στο σημείο A, και μετράμε την απόσταση μεταξύ των σημείων A και B.



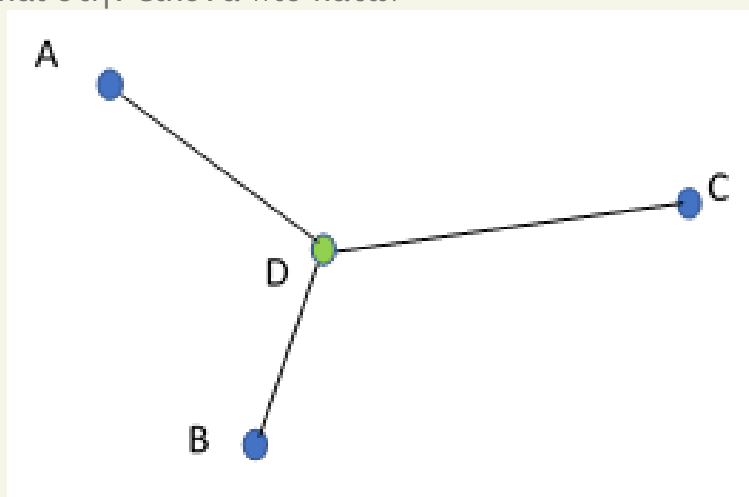
Πηγή: Alessandra Masala, Giardino di Archimede

## Ενότητα 3 Ενώνοντας πόλεις

Πως να συνδέσουμε τρεις πόλεις με ένα οδικό σύστημα ελάχιστου μήκους; Παίρνουμε ως δεδομένο, τις τρεις πόλεις A, B και Γ, για να βρούμε ένα σημείο Δ έτσι ώστε το άθροισμα των τριών αποστάσεων  $AD+BD+ΓΔ$  να είναι το ελάχιστο.

**Τι;**

Δύο παράλληλα φύλλα από πλεξιγκλάς συνδέονται με μικρούς σωλήνες. Το αντικείμενο βυθίζεται σε διάλυμα σαπουνιού, και το αποτέλεσμα είναι αυτό που φαίνεται και στην εικόνα πιο κάτω.



Πηγή: Alessandra Masala, Giardino di Archimede



## **ΚΑΝΕ ΤΟ ΜΟΝΟΣ/Η ΣΟΥ – ΔΗΜΙΟΥΡΓΗΣΤΕ ΤΑ ΔΙΚΑ ΣΑΣ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΗ-ΤΥΠΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

Όπως θα έχει παρατηρήσει ένας προσεκτικός αναγνώστης, οι πληροφορίες που περιέχονται στο παράδειγμα του προηγούμενου μέρους, 1.3, δίδονται με μια λογική σειρά, προκειμένου να διευκολυνθεί τόσο η υλοποίηση του εργαλείου σε πρακτικό επίπεδο αλλά και απορρόφηση της νέας γνώσης. Για το λόγο αυτό, έχει αποφασιστεί ότι και τα τρία παραδείγματα θα πρέπει να αναδιαρθρωθούν και να ξανακατασκευαστούν, αυτή τη φορά βάσει προκαθορισμένων υπό-ενοτήτων (τίτλους), με πιο ξεκάθαρα βήματα και πιο διακριτά μέρη, επίσης όπως έχει αναφερθεί πιο πάνω. Μια τέτοια διάρθρωση πληροφοριών κάτω από τους προαναφερθέντες τίτλους θα μπορούσε να είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για ένα εκπαιδευτικό ο οποίος σκοπεύει να δημιουργήσει το δικό του εργαλείο μη-τυπικής διδασκαλίας των μαθηματικών. Συνεπώς, στην παράγραφο αυτή θα δοθούν περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη διαδικασία που πρέπει κάποιος να ακολουθήσει για να μπορέσει να δημιουργήσει τα δικά του εργαλεία.

### **Βήμα 1ο: Επιλέξτε μια ομάδα-στόχο**

Αρχικά, ο δημιουργός ενός εργαλείου μη-τυπικής διδασκαλίας των μαθηματικών πρέπει να αποφασίσει την ομάδα-στόχου στην οποία θα απευθύνεται το εργαλείο. Αναφερόμενοι σε ομάδα-στόχο εννοούμε το εύρος ηλικίας στο οποίο το εργαλείο θα είναι κατάλληλο. Πάντοτε σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς στόχους και το πρόγραμμα όπως αυτά έχουν καθοριστεί από το σχολείο. Με άλλα λόγια, πρέπει να είμαστε πάντα βέβαιοι ότι το υλικό το οποίο σκοπεύουμε να δημιουργήσουμε για ένα συγκεκριμένο εύρος ηλικίας συμβαδίζει με τα αντίστοιχα σχολικά προγράμματα των εκπαιδευτικών συστημάτων.

### **Βήμα 2ο: Επιλέξτε μια Μαθηματική Έννοια με την οποία θα ασχολείται το εργαλείο**

Το δεύτερο βήμα είναι να επιλέξει τη μαθηματική έννοια πάνω στην οποία θα ήθελε να εργαστεί. Η έννοια που θα επιλεγεί πρέπει να ταιριάζει με την ομάδα-στόχο που έχει επιλεγεί στο προηγούμενο βήμα και ακολούθως να επιλέξει σε ποιο βαθμό θα εμβαθύνει σε αυτή την έννοια. Κάτι που πρέπει να ληφθεί επίσης υπόψιν, είναι το κατά πόσον πρόκειται να συνδεθεί με ορισμένες αλληλοσυνδεόμενες έννοιες. Κάποια θέματα τα οποία πρέπει να αντιμετωπιστούν είναι το εάν όλες οι αλληλένδετες έννοιες έχουν ήδη διδαχθεί στη συγκεκριμένη ομάδα-στόχος, και εάν πρέπει να αναθεωρηθούν.

### **Βήμα 3ο: Επιλέξτε το γενικό στόχο και σκοπό του εργαλείου**

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, πρέπει να μετατρέψει εκπαιδευτικούς σκοπούς από τη θεωρία στην πράξη. Συνεπώς, για να πετύχει, η υλοποίηση των καθορισμένων εκπαιδευτικών στόχων πρέπει να είναι ρεαλιστική και να είναι σαφείς σε ότι αφορά τη διατύπωση και τη σύνθεση τους. Συνεπώς είναι σημαντικό τόσο για το δημιουργό αλλά και τον αποδέκτη του εργαλείου να έχουν ξεκάθαρο στο μυαλό τους το επιθυμητό αποτέλεσμα μετά το πέρας της άσκησης.

## Βήμα 4ο: Επιλέξτε τη χρονική διάρκεια

Ο/η δημιουργός πρέπει να έχει αποφασίσει εξ αρχής το εάν το εργαλείο του/ης θα διαρκεί για μικρή ή μεγάλη χρονική διάρκεια, έτσι ώστε να «χωράει» μέσα του ένα λογικό αριθμό εργασιών. Να θυμάστε ότι ένα επιτυχημένο εργαλείο δεν πρέπει ούτε να υποτιμά αλλά ούτε και να υπερεκτιμά τη παράμετρο της «χρονικής διάρκειας». Εξάλλου, ένα από τα εγγενή χαρακτηριστικά ενός εργαλείου είναι η «δυνατότητα μεταφοράς». Για αυτό σε ορισμένες περιπτώσεις, για παράδειγμα όταν το εργαλείο ενσωματώνει ένα παιχνίδι, είναι καλύτερα να υποδείξετε μια ενδεικτική χρονική διάρκεια (βλ. Nim\_game – 15+).

## Βήμα 5ο: Επιλέξτε Μέσα και Τεχνικές

Στο υπό-κεφάλαιο με τίτλο «Βοήθεια στη διδασκαλία. Μέσα και Τεχνικές», ένας ενδιαφερόμενος εκπαιδευτικό μπορεί να κάνει μια επιλέξει από τον Πίνακα 2.2 μέσα, τεχνικών ή ακόμη αντικείμενα που να συνδυάζουν τα δύο. Η επιλογή αναπόφευκτα θα εξαρτηθεί από τουλάχιστον τέσσερις παραμέτρους:

1. Το εκπαιδευτικό υλικό και οι πηγές που έχετε τώρα στη διάθεση σας. Σε περίπτωση που δεν έχετε τέτοια στη διάθεση σας τέτοια υλικά, μπορείτε να τα αναζητήσετε στο διαδίκτυο βρίσκοντας έτσι μερικές νέες φρέσκες ιδέες. Μπορείτε ακόμα να ανατρέξετε και στη σχετική ακαδημαϊκή βιβλιογραφία. Σε κάθε περίπτωση, μπορείτε επίσης να χρησιμοποιήσετε το ήδη υπάρχον υλικό από έργα σχετικά με τις επιστήμες των 'STEM' (Επιστήμες, Τεχνολογία, Μηχανική, Μαθηματικά), και ακολούθως να το τροποποιήσετε σύμφωνα με τις δικές σας ανάγκες και απαιτήσεις, ακολουθώντας απλώς τις οδηγίες που παρέχονται στην τρέχουσα ενότητα. Πρέπει όμως απαραίτητως να λάβετε υπόψιν:
2. Το κοινωνικό / εκπαιδευτικό περιβάλλον μέσα στο οποίο θα εφαρμοστεί το εργαλείο.
3. Της εκπαιδευτικές υποδομές (αίθουσες πληροφορικής, ανοιχτούς χώρους, εξοπλισμούς) και τη δυνατότητα πρόσβασης στις νέες τεχνολογίες και στο δίκτυο.
4. Τι θα ταίριαζε καλύτερα τόσο με τη μαθηματική έννοια, την ομάδα-στόχος, καθώς και σε ό,τι εξυπηρετεί το θεμελιώδη σκοπό/στόχο σας. Σε κάθε περίπτωση, το εργαλείο σας θα μπορούσε να ενσωματώσει ένα συνδυασμό τυπικών και μη-τυπικών μεθόδων διδασκαλίας.

## Βήμα 6ο: Καταγράψτε τις οδηγίες

Καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής των οδηγιών, να θυμάστε ότι ένα εκπαιδευτικό εργαλείο πρέπει να αποτελεί μια ολοκληρωμένη εκπαιδευτική διαδικασία, ώστε να μπορεί να είναι αυτοτελής. Κατά συνέπεια, όταν θα καταγράφετε τις οδηγίες χρήσης του εργαλείου, βεβαιωθείτε ότι ακολουθούν μια λογική σειρά, για να αποφευχθεί η πιθανότητα ύπαρξης «γνωστικών κενών» κατά την εκπαιδευτική διαδικασία. Αυτό σημαίνει ότι ο δημιουργός θα πρέπει να έχει κατασκευάσει από τα βασικά στοιχεία μιας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας μέχρι τα πιο πολύπλοκα. Επιπλέον, θυμηθείτε ότι ένα εργαλείο πρέπει να παρέχεται σε ακριβή γλώσσα ώστε να μπορεί να μεταφέρει σαφή και ζωντανά μηνύματα.

## **Βήμα 7ο: Καταγράψτε τα επιθυμητά αποτελέσματα και ικανότητες που αποκτούνται από τη χρήση αυτού του εργαλείου**

Σε αυτό το στάδιο του, ο δημιουργός αναμένεται να γράψει κάτι παρόμοιο με αυτό στο 3ο βήμα. Για παράδειγμα, ο Γενικός Στόχος / Σκοπός του εργαλείου μπορεί ήταν: «οι μαθητές πρέπει να μάθουν να πραγματοποιούν μαθηματικές πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού γρήγορα και απλά». Τότε και στο σημείο αυτό που αναφέρεται στο Επιθυμητό Αποτέλεσμα αντίστοιχα πρέπει να γραφτεί ότι «μετά την ολοκλήρωση της δραστηριότητας, οι μαθητές, θα πρέπει να εξοικειωθούν με τις έννοιες της πρόσθεσης / αφαίρεσης / ή και πολλαπλασιασμού, ώστε να είναι σε θέση να εκτελούν απλές μαθηματικές πράξεις γρήγορα και με ακρίβεια.

## **Βήμα 8ο: Σκεφτείτε μια μέθοδο ανασκόπησης και ερωτήσεις προς αξιολόγηση της διαδικασίας**

Για να θεωρηθεί η μεθοδολογία μιας τέτοιας εκπαιδευτικής διαδικασίας ολοκληρωμένη, θα ήταν καλύτερα να υπάρχει ενσωματωμένο και ένα κομμάτι ανασκόπησης, το οποίο να συνοδεύεται από ερωτήσεις αξιολόγησης. Οι ερωτήσεις αυτές πρέπει να απευθύνονται τόσο στους εκπαιδευτικούς όσο και στις ομάδες-στόχους οι οποίοι να καλούνται με αυτό τον τρόπο να αξιολογήσουν ακόμη την ίδια τη διαδικασία. Ενδεικτικά, μερικές ερωτήσεις για αξιολόγηση του εργαλείου από τον εκπαιδευτικό παρατίθενται πιο κάτω:

-Ποιες δεξιότητες έχει αποκτήσει η σχετική ομάδα-στόχος μετά από τη χρήση του εργαλείου αυτού; - Πως θα εφαρμόσετε τις δεξιότητες που έχει αποκτήσει η ομάδα-στόχος κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας; - Ποιες προκλήσεις αντιμετωπίσατε κατά την εφαρμογή του συγκεκριμένου εργαλείου, τόσο σχετικά με την ομάδα-στόχος όσο και με την εκπαιδευτική εργασία; - Με ποιους τρόπους το πρόγραμμα αυτό ικανοποιεί τις δικές σας ανάγκες; - Σκοπεύετε να σταματήσετε κάποιες πρακτικές τις οποίες χρησιμοποιούσατε μέχρι σήμερα, συνεπεία αυτού του εργαλείου; Αν ναι, ποιες είναι αυτές; - Ποιες νέες πρακτικές θα χρησιμοποιήσετε συνεπεία του εργαλείου αυτού; Ποιος ήταν ο αντίκτυπος από τη συμμετοχή της ομάδας-στόχος σε σχέση με: (i) το ενδιαφέρον που έχουν επιδείξει για τη συγκεκριμένη εκπαιδευτική διαδικασία; (ii) την επίδειξη ενδιαφέροντος στις ενσωματωμένες μαθηματικές έννοιες, (iii) τους συμπληρωματικούς εκπαιδευτικούς στόχους που έχουν τεθεί από τον εκπαιδευτικό.

## **Βήμα 9ο: Επιλέξτε τον Τίτλο**

Παρόλο που ο τίτλος είναι το πρώτο πράγμα που αντικρίζει ο αναγνώστης, από την πλευρά του ο δημιουργός είναι το τελευταίο πράγμα για το οποίο θα χρειαστεί να αποφασίσει, αφότου ολοκληρώσει τη διαδικασία σχεδιασμού και λειτουργίας του εργαλείου. Σε κάθε περίπτωση, προσπαθήστε να επιλέξετε έναν πιασάρικο, ελκυστικό και ευφάνταστο τίτλο.

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ

Τα Μαθηματικά είναι ένα πολύ συγκεκριμένο και ακριβές μάθημα. Εάν ζητήσετε από ένα παιδί να σας πει πόσο κάνει  $7 \text{ συν } 3$ , η απάντηση δεν μπορεί να είναι στο περίπου, αλλά αντιθέτως πρέπει να είναι συγκεκριμένη. Είτε είναι σωστή είτε λανθασμένη. Και συνήθως οι μαθητές δεν κερδίζουν βαθμούς όταν πλησιάσουν στη σωστή απάντηση. Επομένως, εξαιτίας του φόβου αυτού να είναι λάθος ή να έχουν αρνητική αξιολόγηση, τα μαθηματικά δημιουργούν τόσο άγχος στα παιδιά όσο κανένα άλλο μάθημα.

Επειδή ακριβώς πρόκειται για ένα «αθροιστικό μάθημα» (Brian Butterworth), γνώση κατασκευάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε η νέα πληροφορία να βασίζεται και να συνδέεται με προηγούμενη. Η επίτευξη διαρκούς προόδου στην εκμάθηση των μαθηματικών είναι μια πολύ δύσκολη ιδιαίτερα για άτομα Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (SLD – Specific Learning Disorders).

Οι Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες (ΕΜΔ) ονομάζονται έτσι επειδή δεν είναι αποτέλεσμα οπτικών, ακουστικών ή κινητικών αναπηριών, καθώς ούτε και νοητικής καθυστέρησης, συναισθηματικών διαταραχών, ή μειονεκτημάτων τα οποία να απορρέουν από περιβαλλοντικούς, πολιτιστικού ή οικονομικούς λόγους.

## ΟΙ ΕΜΔ ΔΕΝ ΠΡΟΚΑΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ

- Φυσικές αναπηρίες
- Νοητική αναπηρία ή αναπτυξιακές καθυστερήσεις
- Ψυχολογικά ή αισθητηριακά προβλήματα
- Κοινωνικό-πολιτιστικούς παράγοντες

## ΠΑΡΑΤΙΘΕΤΑΙ ΕΔΩ ΜΙΑ ΛΙΣΤΑ ΜΕ ΕΜΔ:

- Δυσλεξία – Δυσκολία στην ανάγνωση και την ορθογραφία
- Δυσγραφία – Δυσκολία στη γραφή και μερικές λεπτές κινητικές δεξιότητες.
- Δυσαριθμσία – Δυσκολία στην αριθμητική και τα μαθηματικά
- Δυσφασία – Δυσκολία στην παραγωγή και κατανόηση της ομιλούμενης γλώσσας

## ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΑ:

- Δυσπραξία – δυσκολία στο γενικό και λεπτό κινητικό συντονισμό. Χαρακτηρίζεται ως Αναπτυξιακή Συντονιστική Δυσκολία και όχι ως Ειδική Μαθησιακή Δυσκολία. Έχει όμως αρνητική επιρροή στη μαθησιακή διαδικασία.

Παρόλο που πολλοί σπουδαστές επηρεάζονται από ΕΜΔ, η εκτίμηση του βαθμού από τον οποίο επηρεάζονται διαφέρει. Ο Ευρωπαϊκός Σύνδεσμος Δυσλεξίας υπολογίζει ότι περίπου μεταξύ 5 και 12 τοις εκατό του γενικού πληθυσμού αντιμετωπίζει τουλάχιστον μια μορφή ΕΜΔ.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για τον περισσότερο κόσμο (συμπεριλαμβανομένου καθηγητών, εκπαιδευτικών και ανθρώπων που λαμβάνουν αποφάσεις), τα μαθηματικά είναι ένα πολύπλοκο μάθημα το οποίο μπορεί μονάχα να διδαχθεί με τον επίσημο παραδοσιακό τρόπο. Πολλοί από εμάς έχουν αντιμετωπίσει δυσκολίες με τη βασίλισσα της επιστήμης, όπως χαρακτηρίζονται τα μαθηματικά. Με τη κατανόηση της συλλογιστικής των τόσων πολλών αφηρημένων εννοιών, αλλά για τους μαθητές οι οποίοι αντιμετωπίζουν ΕΜΔ κάποιες από τις σχετικές εργασίες αντιμετωπίζουν επιπρόσθετες δυσκολίες.

### **ΟΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΠΟΥ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΕΜΔ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ:**

- Να έχουν σωστή αίσθηση των αριθμών και του πως λειτουργούν
- Να κατανοούν τα σύμβολα και να απομνημονεύουν το σχετικό λεξιλόγιο.
- Να κατανοούν λειτουργίες των σχημάτων όπως: η συμμετρία, το σχετικό μέγεθος, την ποσότητα τους και τον τρόπο χειρισμού τους.
- Αδύναμη βραχυχρόνια και μακροχρόνια μνήμη, απαραίτητες για την αυτοματοποίηση των διαδικασιών κατά τους μαθηματικούς υπολογισμούς.
- Να χρησιμοποιούν τα απαραίτητα εργαλεία σχεδίασης, λόγω κακών κινητικών δεξιοτήτων.
- Δυσκολίες στην ανάγνωση αλλά και στα οργανωτικά οι οποίες καθιστούν δυσκολότερη την επίλυση πολυεπίπεδων προβλημάτων.
- Δυσκολεύονται να θυμούνται τους πίνακες πολλαπλασιασμού και κατ' επέκταση στο να δοκιμάζουν διάφορες προσεγγίσεις για να βρουν την καταλληλότερη.

Για να γίνουν τα αθηματικά «φιλικά» προς τα άτομα που αντιμετωπίζουν διαφόρων ειδών μαθησιακές δυσκολίες είναι απαραίτητη η επικοινωνία με τους μαθητές. Αυτό θα βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς στο να γνωρίζουν καλύτερα ποιες μέθοδοι αρέσουν στους μαθητές, πως προσεγγίζουν τα καθήκοντα τους και τι τους αποθαρρύνει κατά τη διάρκεια της διαδικασίας.

### **ΜΕΡΙΚΕΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ ΟΙ ΟΠΟΙΕΣ ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΕΠΩΦΕΛΕΙΣ ΓΙΑ ΟΛΟΥΣ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΕΜΔ:**

- Στα μαθήματα τα οποία ασχολούνται με Γεωμετρία, να χρησιμοποιούν πραγματικά και εύχρηστα αντικείμενα.
- Να συμβουλεύουν τους μαθητές να διαβάζουν δυνατά τα μαθηματικά προβλήματα και να τα χωρίζουν σε μικρά βήματα.
- Να ξεκινούν το μάθημα με μια σύντομη εισαγωγή του τι θα διδαχθούν και να το τελειώνουν με μια ανακεφαλαίωση με τις πιο σημαντικές πληροφορίες.
- Να κάνουν τη διδασκαλία πιο κατανοητή επεξηγώντας σε μορφή λεξικού το λεξιλόγιο και τα σύμβολα τα οποία χρησιμοποιούνται συχνά.

- Να ελαχιστοποιούν κατά το μέγιστο δυνατό το θεωρητικό μέρος των Μαθηματικών συνδέοντας τις ασκήσεις με παραδείγματα τα οποία να βρίσκουν εφαρμογή στην καθημερινή πραγματική ζωή.
- Να χρησιμοποιούν βιβλία και αντίγραφα με μεγάλα ευδιάκριτες διατυπώσεις και μεγάλα κενά μεταξύ γραμμών και παραγράφων (προτιμάται το διάστιχο 1,5). Το μέγεθος των γραμματοσειρών πρέπει να είναι μεταξύ 12-14.
- Συνιστάται η χρήση μιας απλής, ομοιόμορφης γραμματοσειράς όπως Sans Serif, Arial και Comic Sans. Άλλες: Verdana, Tahoma, Century Gothic και Trebuchet. Καλό είναι να θυμάστε όμως ότι κανένα είδος γραμματοσειράς δεν είναι κατάλληλο για όλους και θα πρέπει να το δοκιμάσετε με τους μαθητές σας για να δείτε τι λειτουργεί καλύτερα για αυτούς.

Η χρήση τεχνολογίας ΕΠ προσφέρει μια εξαιρετική ευκαιρία ενίσχυσης των ικανοτήτων οπτικοποίησης, οι οποίες είναι απαραίτητες για την εκμάθηση των μαθηματικών. Η άλγεβρα βασίζεται σε ένα συμπιεσμένο σύστημα γραπτών συμβόλων με συγκεκριμένο λεξιλόγιο και απαιτεί την αυτοματοποίηση υπολογισμών. Η γεωμετρία από την άλλη βασίζεται στην κατανόηση των σχημάτων, της συμμετρίας, των σχετικών μεγεθών και ποσοτήτων, του τρόπου χειρισμού τους και του τρόπου με τον οποίο εντοπίζονται με ακρίβεια στο χαρτί.



# ΕΝΣΩΜΑΤΩΝΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΕΠ ΣΤΗ ΜΗ-ΤΥΠΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΕΣ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΤΗ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΣΤΙΓΜΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.

Η Εκπαιδευτική Επιστημονική και Πολιτιστική Οργάνωση των Ηνωμένων Εθνών (UNESCO), έχει ανάμεσα στις προτεραιότητές της την ενσωμάτωση των ΤΠΕ (Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνίας) στην εκπαίδευση αφού κάτι τέτοιο μπορεί να διασφαλίσει την ισότιμη πρόσβαση στην εκπαίδευση. Η παράγραφος που ακολουθεί προέρχεται από έκδοση της UNESCO η οποία αναφέρεται στο ρόλο των ΤΠΕ στην εκπαίδευση και επεξηγεί τη θέση του οργανισμού σχετικά με την πρωτοβουλία αυτή.

Η UNESCO έχει μια ολιστική και ολοκληρωμένη προσέγγιση προώθηση των ΤΠΕ στην εκπαίδευση. Προσβασιμότητα, ευρεία ένταξη και διασφάλιση της ποιότητας συγκαταλέγονται μεταξύ των κυριότερων προκλήσεων οι οποίες πρέπει να αντιμετωπιστούν. Η Δια-τομεακή Πλατφόρμα του Οργανισμού για την εισαγωγή των ΤΠΕ στην εκπαίδευση εστιάζει σε αυτά τα ζητήματα μέσω συνεργασίας τριών τομέων. Της Επικοινωνίας και πληροφόρησης, της Εκπαίδευσης και του τομέα της Επιστήμης. Στην Ευρώπη, οι ΤΠΕ άρχισαν να ενσωματώνονται αλλά και να ενθαρρύνεται η χρήση τους στα σχολεία εδώ και χρόνια. Επίσης έντονη είναι η προώθηση της μη-τυπικής εκπαίδευσης, ειδικότερα στη διδασκαλία των μαθηματικών.

## Η ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΟΘΟΝΩΝ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ: ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗΣ, ΤΑΜΠΛΕΤ, ΕΞΥΠΝΩΝ Ή ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ.

Οι ψηφιακές οθόνες, γενικότερα, πλέον είναι ιδιαίτερα γνώριμες στο περιβάλλον των μαθητών οι οποίοι νιώθουν εξοικειωμένοι με αυτές. Αυτό είναι ένα βοηθητικό στοιχείο καθώς αυξάνεται η αυτοπεποίθησή τους και ενθαρρύνονται στην ανάληψη πρωτοβουλιών. Έτσι αυξάνονται τα κίνητρα για ενεργό συμμετοχή των μαθητών στο μάθημα. Παράδειγμα ο ψηφιακός πίνακας που ακολουθεί:





Μια δια-δραστική οθόνη είναι συνδεδεμένη με ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή και ένα προβολέα βίντεο. Η διάδραση γίνεται μέσω ενός ηλεκτρονικού στυλό ή απλά αγγίζοντάς την, και ακολούθως η οθόνη αναμεταδίδει στον υπολογιστή.

Μερικά από τα πλεονεκτήματα της χρήσης ψηφιακών πινάκων είναι τα εξής:

- Δίνουν τη δυνατότητα στον καθηγητή να καταγράφει το μάθημα, ιδιαίτερα τα βήματα εκείνα που είναι πιο περίπλοκα. Ακολούθως, μπορεί να τα μοιραστεί με τους μαθητές οι οποίοι μπορούν να τα ανακαλέσουν ανά πάσα στιγμή.
- Προωθεί τη συμμετοχικότητα και τη διαδραστικότητα των μαθητών στην τάξη.
- Προσφέρει επιπλέον κίνητρα. Καθώς προσφέρει μια ψυχαγωγική, διασκεδαστική και σύγχρονη άποψη στη διδασκαλία, τραβά την προσοχή των μαθητών από την αρχή και τους βοηθά στη συνέχεια να διατηρήσουν το ενδιαφέρον και της προσοχή τους. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τους μαθητές με ΔΕΠΥ (Διαταραχή Ελλειμματικής Προσοχής και Υπερκινητικότητας).
- Επιτρέπει την χειροπιαστή αναπαράσταση ορισμένων αφηρημένων οντοτήτων (για παράδειγμα στη γεωμετρία) για τη διευκόλυνση και την εμπέδωση καλύτερης αφομοίωσης μαθηματικών εννοιών.

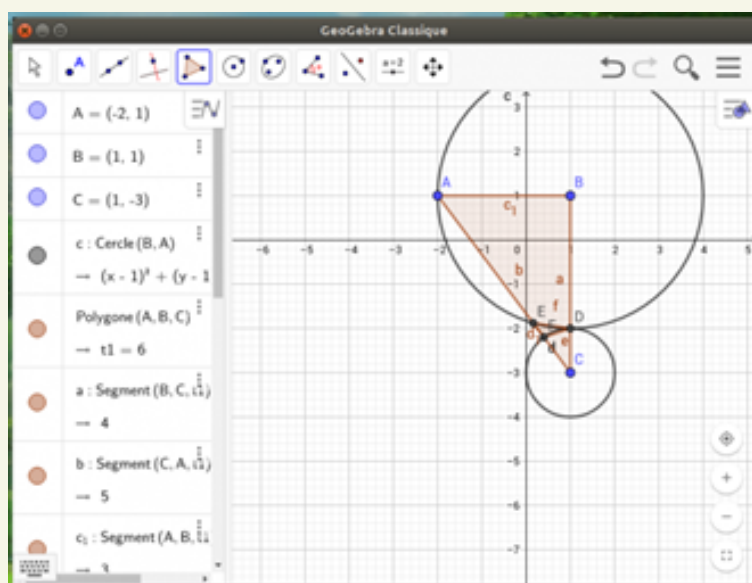
### ΛΟΓΙΣΜΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΟΥ ΔΙΕΥΚΟΛΥΝΟΥΝ ΤΗΝ ΕΚΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σήμερα, υπάρχουν δωρεάν εκπαιδευτικά προγράμματα για την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών μέσω μη-τυπικών τρόπων. Θεωρείται ότι, χρησιμοποιώντας τη γνώση προς επίλυση τα προβλήματα τα οποία προκύπτουν, οι μαθητές θα ενδυναμώσουν τις δεξιότητές τους αλλά και τις πνευματικές τους ικανότητες. Με την εξάσκηση του παιχνιδιού οι μαθητές εξοικονομούν χρόνο για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Αυτό τους βοηθά να ανθεκτικοποιήσουν τις ικανότητές τους στα μαθηματικά κάτι που τους επιτρέπει να αναπτύξουν διάφορες στρατηγικές.

Η τεχνολογία δεν είναι μόνο πιο διασκεδαστική από την απλή χρήση χαρτιού και μολυβιού. Επιτρέπει στους μαθητές να αναθεωρήσουν τις έννοιες από μια διαφορετική σκοπιά.

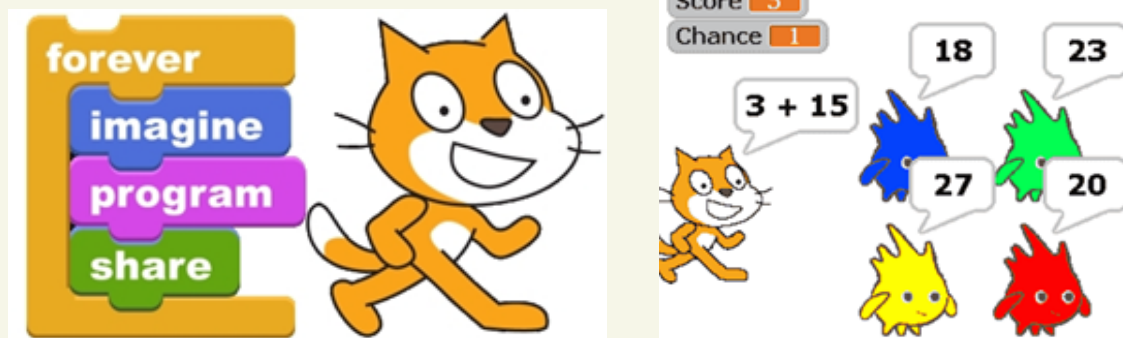
#### Μερικά Παραδείγματα

**GeoGebra:** ένα δυναμικό και εύχρηστο λογισμικό μαθηματικών, το οποίο απευθύνεται σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης και συνδυάζει γεωμετρία, άλγεβρα, λογιστικά φύλλα, γραφιστικά, στατιστικά και απειροελάχιστους υπολογισμούς.



Πηγή: απεικόνιση οθόνης από [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

Το **Scratch** είναι ένα λογισμικό οπτικού προγραμματισμού. Αυτός ο τύπος προγραμματισμού έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εξαλείφει πιθανά σφάλματα σύνταξης. Εξακολουθεί όμως να είναι μια ισχυρή γλώσσα προγραμματισμού που καθιστά δυνατή τη χρήση όλων των εννοιών του αλγοριθμικού, όπως οι μεταβλητές, τα κυκλώματα, οι υποθετικές οδηγίες, τα υποπρογράμματα κλπ.



Πηγή: απεικόνιση οθόνης από <https://scratch.mit.edu/>

Το **Le Roi des Maths** είναι ένα διασκεδαστικό παιχνίδι μαθηματικών. Παίρνοντας το ρόλο του γεωργού, μπορείτε να δημιουργήσετε το χαρακτήρα σας, και ακολούθως να απαντήσετε σε ερωτήσεις μαθηματικών για να βελτιώσετε το συνολικό σκορ σας.



Πηγή: απεικόνιση εικόνας από <http://www.jeux.org/jeu/le-roi-des-maths.html>

## ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΔΙΚΤΥΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΝΕΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Το διαδίκτυο προσφέρει πολλαπλά μέσα για την υποστήριξη της διδασκαλίας των μαθηματικών. Αυτό επιτρέπει τη διαφοροποίηση του τρόπου διδασκαλίας των εννοιών και έτσι πολλαπλασιάζονται οι δυνατότητες μάθησης και αφομοίωσης τους.

## Μερικά Παραδείγματα

Χρησιμοποιώντας μαθηματικές διαδρομές στην πόλη: **MathCityMap**

Το MathCityMap παρέχει στους εκπαιδευτικούς λογισμικό που διευκολύνει τη δημιουργία διαδρομών για να κάνουν τα μαθήματα μαθηματικά. Η εφαρμογή αυτή, επιτρέπει στους μαθητές να εντοπίζουν αινίγματα και να απαντούν στα ερωτήματα που τίθενται καθ' όλη τη διάρκεια του μαθήματος. Η άμεση επικύρωση της απάντησής τους, τους επιτρέπει αναλόγως, να επαναρχίσουν ή να συνεχίσουν τη διαδρομή τους. Τα αινίγματα τα οποία προτείνονται, συχνά μειώνονται σε μέγεθος (μήκος, περιοχή, όγκος) αλλά άλλοι τομείς είναι επίσης δυνατοί.

Χρήση βίντεο (Youtube) για την υποστήριξη των μαθημάτων: **Videos Scientificfiz (στα Γαλλικά)**

Στο διαδίκτυο, και πιο συγκεκριμένα στο YouTube, υπάρχουν πολλά βίντεο που μιλάνε για τη διδασκαλία των μαθηματικών με ένα μη-τυπικό τρόπο. Στη Γαλλία, υπάρχει ένα παράδειγμα σχολικού έργου: το κανάλι Scientificfiz στο YouTube.



Πηγή: [https://www.youtube.com/channel/UCIUbsSRKVVOpWI\\_xB3soLU1g/](https://www.youtube.com/channel/UCIUbsSRKVVOpWI_xB3soLU1g/)

Τα βίντεο τα οποία έχουν γραφεί και σπτικογραφηθεί από τους μαθητές, μιλούν για το μαγικό κόσμο των μαθηματικών, κρυμμένους κωδικούς, καθώς και μαθηματικούς όπως οι Φερμά και Πυθαγόρας...

Άλλοι παραγωγοί στο Youtube, οι οποίοι δημοσιεύουν βίντεο τα οποία διαδίδουν μαθηματικές έννοιες, μπορούν επίσης να συμπληρώσουν τα παραδοσιακά μαθήματα μέσω:

NUMBERPHILE (Αγγλικά): <https://www.youtube.com/user/numberphile>

MICMATHS (Γαλλικά): <https://www.youtube.com/user/Micmaths>

Μπορείτε επίσης να ανεβάσετε σχετικές φωτογραφίες μέσω Twitter με hashtag: **#mathsenvie**

## ΑΜΙΑ ΝΕΑ ΜΟΝΤΕΡΝΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

Μαθητές από το νότιο μέρος της Γαλλίας μαζεύτηκαν το 2018 για να εργαστούν για τη σχεδίαση του Μαθηματικού Παιχνιδιού Jumathsji. Έτσι, δημιούργησαν μια αφίσα παιχνιδιού που χρησιμοποιεί επαυξημένη πραγματικότητα. Δηλαδή, αυτή η αφίσα (η οποία μπορεί να δημοσιευτεί τόσο στο διαδίκτυο, αλλά και οπουδήποτε αλλού) θα μπορεί να μιλάει, να ανακαλύπτει μέσω ενός έξυπνου τηλεφώνου μια επείδηξη του παιχνιδιού, καθώς και να διαβάζει ή να ακούει ένα μικρό βιογραφικό πέντε μαθηματικών: της Υπατίας από την Αλεξάνδρεια, της Μαρίας Ανιέζι, του Ευκλείδη, του Ίππαρχου και του Cédric Villani. ΟΙ ερωτήσεις γράφτηκαν από τους μαθητές και αφορούν τα μαθηματικά. Σχετίζονται όμως και με άλλα πεδία.



Πηγή: Pierre Henry, Casarotto Collège de Bazas

Πως δουλεύει; Σαρώνοντας τον κωδικό QR ο οποίος βρίσκεται στο λογισμικό, στη γεωμετρία, τα προβλήματα που δημιουργεί η αφίσα στο παιχνίδι: η κοιλάδα των αριθμών, η δυσδιάστατη πεδιάδα, οι τρισδιάστατοι χώροι, ένα βουνό με προβλήματα, ενώ υπάρχει ακόμη ένα μέρος μαθηματικών στα Αγγλικά.

## ΝΕΕΣ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΔΩΣΕΙ Η ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΕΠ ΣΤΑ ΜΗ-ΤΥΠΙΚΑ ΣΕΝΑΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η τεχνολογία ΕΠ μπορεί να προσφέρει πολλά στην εκμάθηση των μαθηματικών. Όντως, όπως έχει αναλυθεί στο κεφάλαιο 1, η μη-τυπική προσέγγιση του μαθήματος είναι επωφελής για την εκπαίδευση των μαθητών γενικότερα, αλλά και συγκεκριμένα, στην εκπαίδευση τους στα μαθηματικά.

### Προσεγγίζοντας τα μαθηματικά με ένα διαφορετικό τρόπο

Οι εκπαιδευτικοί, συχνά χρησιμοποιούν φωτογραφίες και βίντεο για να εισάγουν μια νέα έννοια με ένα μη-τυπικό τρόπο. Οι μαθητές παρακολουθούν αυτά τα στοιχεία, αλλά συνήθως, έχοντας μια παθητική στάση. Απεναντίας, η ΕΠ επιτρέπει στους μαθητές να 'βυθιστούν' κατευθείαν στο μάθημα. Μερικά παραδείγματα, τα οποία μπορούν να αλλάξουν τον τρόπο με τον οποίο προσφέρονται τα μαθήματα μαθηματικών, είναι τα ακόλουθα:

Στη γεωμετρία, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν μια φόρμα κυνηγίου για να δώσουν ζωή σε αυτό τον κλάδο. Οι μαθητές πρέπει να βρουν όλα τα γεωμετρικά σχήματα στο δικό τους περιβάλλον. Συχνά, υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των σχημάτων τα οποία μπορούν να βρουν. Αντιθέτως, με την ΕΠ, οι μαθητές μπορούν να ταξιδέψουν σε όλο τον κόσμο για να αναζητήσουν σχήματα, ή απλά να κυκλοφορήσουν μέσα σε ένα εικονικό γεωμετρικό κόσμο.



Για να δουλευτεί η μαθηματική λογική, τα Escape Rooms, αναπτύσσονται ολοένα και περισσότερο στην τάξη, αλλά η εγκατάστασή τους, η διευθέτηση της διακόσμησης και όλης της ατμόσφαιρας είναι αρκετά περίπλοκη. Από την άλλη, φανταστείτε παζλ ΕΠ υπό τύπον Escape Room. Οι μαθητές θα ήταν πολύ πιο ενθουσιώδεις ενώ η επιλογή αινιγμάτων θα ήταν τεράστια.

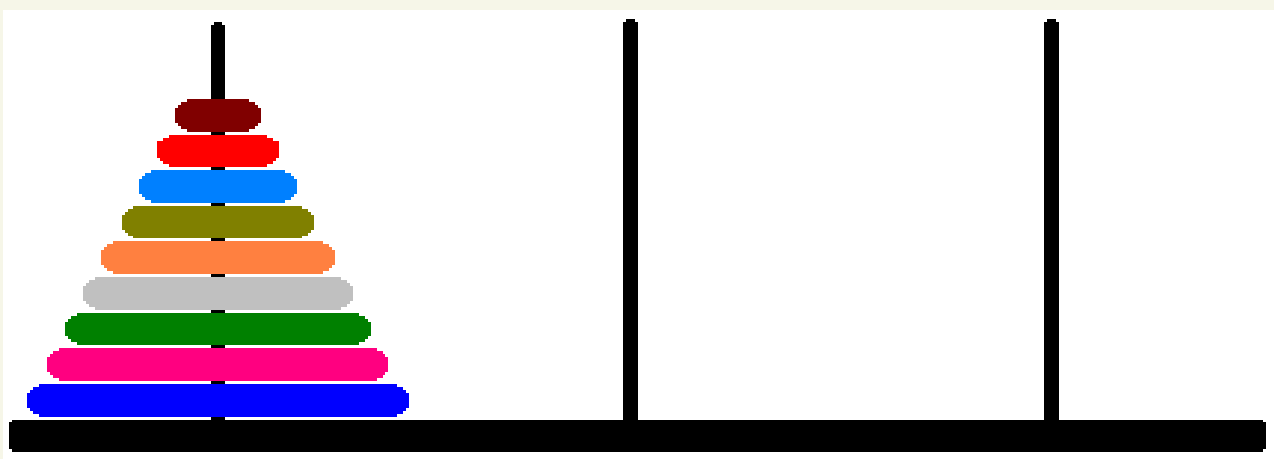
Για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, οι μαθητές συχνά ξέρουν πως να κάνουν τους υπολογισμούς, αλλά δυσκολεύονται να κατανοήσουν με πιο τρόπο να βρουν το αποτέλεσμα ή στο να αποφασίσουν ποιες πράξεις να ακολουθήσουν. Συχνά αυτό οφείλετε στην έλλειψη μαθηματικού λεξιλογίου. Αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα αυτό σε ΕΠ, ο μαθητής μπορεί να το κατανοήσει καλύτερα. Για παράδειγμα, όταν έχουν ένα πρόβλημα για την εύρεση του όγκου νερού, γεμίζοντας σωλήνες ή άλλως πως, μπορούν να το δοκιμάσουν σε δοχεία ΕΠ, και να βρουν τη λύση πολλαπλασιάζοντας. Κάτι που θα ήταν αδύνατο για τα περισσότερα προβλήματα.

### Ο γρίφος του Πύργου στο Ανόι

Όπως έχουμε δει στο κεφάλαιο 1, ο Πύργος στο Ανόι, είναι ένας μαθηματικός γρίφος ο οποίος επιτρέπει την προσέγγιση μαθηματικών εννοιών με μη-τυπικούς τρόπους. Ο γρίφος αυτός μπορεί να δώσει κίνητρα στους μαθητές, να εργαστούν πάνω σε αυτές μαθηματικές έννοιες, αλλά συχνά παραμένουν 'κολλημένοι' για χειρωνακτική ανάλυση. Όντως, όταν ο αριθμός των δίσκων είναι μεγάλος, αυτό χρειάζεται πολλή συγκέντρωση για να τελειώσει.

Φανταστείτε όμως το γρίφο αυτό σε ΕΠ! Οι μαθητές μπορούν να το δοκιμάσουν, όπως στην πραγματική ζωή, ενώ μπορούν να κάνουν πολύ περισσότερα, όπως:

- Να ζητήσουν βοήθεια και στοιχεία
- Να κάνουν τις μαθηματικές έννοιες να εμφανίζονται απευθείας μπροστά τους
- Να αλλάζουν τα χρώματα των δίσκων για καλύτερη κατανόηση
- Να ακούσουν για το θρύλο γύρω από αυτό το γρίφο



Πηγή [www.france-ioi.org](http://www.france-ioi.org)

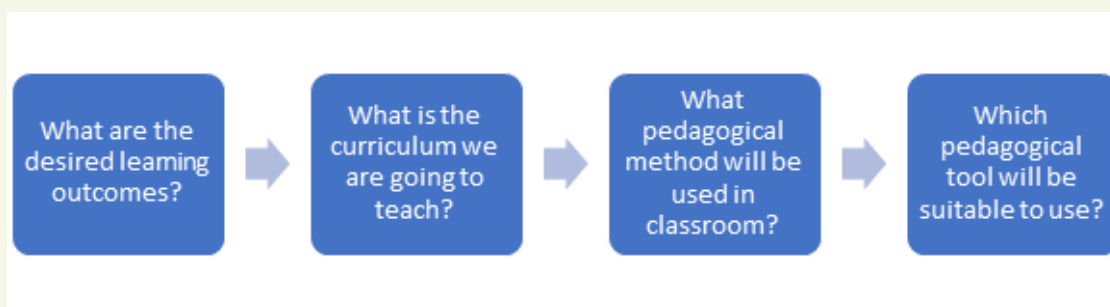
# ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΠΤΥΧΕΣ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΕΠ

## ΤΙ ΚΑΝΕΙ ΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ, ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΚΡΙΤΗΡΙΑ

Τα προηγούμενα χρόνια όλοι είχαμε γίνει μάρτυρες μερικών ενδιαφερόντων αλλαγών, σε ότι αφορά τα εργαλεία που οι χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί στην τάξη, αλλά και για να ολοκληρώσουν τους παιδαγωγικούς στόχους του μαθήματος το οποίο διδάσκουν. Έχοντας ως κίνητρο την πληθώρα στοιχείων, τα οποία δείχνουν την αποτελεσματικότητα της ενεργού μάθησης, σε σύγκριση με την παραδοσιακή διδασκαλία των STEM στην τάξη[1], πολλοί εκπαιδευτικοί αναζητούν διάφορους τρόπους για να αλλάξουν την πρακτική που ακολουθούν στην τάξη, ούτως ώστε να ενσωματώσουν την ενεργή μάθηση.

Ο μετασχηματισμός αυτός, είναι ορατός στη συνεχή ανάπτυξη της βιομηχανίας της Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας. Σε παγκόσμιο επίπεδο, μεταξύ 1997 και 2017, πάνω από 37,8 δισεκατομμύρια δολάρια έχουν επενδυθεί σε εταιρείες εκπαιδευτικής τεχνολογίας.

Εντυπωσιακό είναι το γεγονός ότι το 62% από αυτό το ποσό, επενδύθηκε μόλις τα τρία τελευταία χρόνια, από το 2015 μέχρι το 2017[2]. Ένας καλός παιδαγωγικός σχεδιασμός, είτε είναι σε παραδοσιακή μορφή, είτε ψηφιακή, πρέπει να είναι ευθυγραμμισμένος με τη διδακτέα ύλη, τις μεθόδους διδασκαλίας που χρησιμοποιούμε, το περιβάλλον διδασκαλίας το οποίο επιλέγουμε καθώς και τις διαδικασίες αξιολόγησης που υιοθετούμε (Biggs, 1999). Κατά κύριο λόγο, ο ρόλος των εκπαιδευτικών ως εμπειρογνομόνων σχεδιαστών μάθησης (Laurillard, 2013 · Selwyn, 2016) είναι να καθιερώσουν εκπαιδευτικά καθήκοντα, υποστηρικτικά περιβάλλοντα μάθησης και ευνοϊκές μορφές κοινωνικών σχέσεων στην τάξη. Για να ακολουθήσετε αυτή τη διαδρομή, οι ακόλουθες ερωτήσεις θα μπορούσαν να είναι χρήσιμες:



[1] Freeman, S, Eddy, SL, McDonough, M, Smith, MK, Okoroafor, N, Jordt, H, Wenderoth, MP. (2014). Η ενεργητική μάθηση αυξάνει την αποδοτικότητα των μαθητών στις επιστήμες, τη μηχανική, και τα μαθηματικά. Πρακτικά της Εθνικής Ακαδημίας Επιστημών, 111 (23), 8410-8415.

[2] Metaari Research Report: The 2017 Global Learning Technology Investment Patterns

## Επομένως, με ποια κριτήρια ένα εργαλείο ΕΠ μπορεί να θεωρείται παιδαγωγικό;

Το 2002, η κοινοπραξία για τις δεξιότητες του 21ου αιώνα -ένας συνασπισμός μεταξύ της επιχειρηματικής κοινότητας, ανθρώπων που βρίσκονται σε ηγετικές θέσεις και που λαμβάνουν αποφάσεις για θέματα εκπαίδευσης- δημιούργησε το πλαίσιο μάθησης για τον 21ο αιώνα. Το πλαίσιο αυτό, προσφέρει μια ολιστική άποψη για τις σύγχρονες πρακτικές διδασκαλίας και εκμάθησης. Μέσα στο πλαίσιο της καθοδήγησης των βασικών γνώσεων, οι μαθητές πρέπει να μάθουν τις λεγόμενες ικανότητες '4Cs'. Αυτές οι ικανότητες θεωρούνται απαραίτητες για να μπορέσουν οι μαθητές να μεγαλουργήσουν τόσο στην εργασία τους, όσο και στη ζωή γενικότερα.



Οι 4 δεξιότητες ('4Cs') του 21ου αιώνα.

Τα ψηφιακά εργαλεία μπορούν να καλλιεργήσουν αυτές τις δεξιότητες στους μαθητές. Δεδομένου ότι η ΕΠ θεωρείται ότι έχει μεγάλη προοπτική στην παροχή γνώσης μέσω εμπειριών, θα επιχειρήσουμε να αξιολογήσουμε την παιδαγωγική της αποτελεσματικότητα, σε σχέση με τις αρχές των δεξιοτήτων 4Cs.

Η **κριτική σκέψη (Critical thinking)** αναφέρεται στις ικανότητες των μαθητών να αναλύουν, να ερμηνεύουν, να αξιολογούν, να λαμβάνουν αποφάσεις και να επιλύουν προβλήματα. Μπορεί να αναπτυχθεί στην τάξη, μέσω καθοδηγούμενων ερωτημάτων και προγραμμάτων ή εκμάθησης επίλυσης προβλημάτων. Έτσι, για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια του μαθήματος σχετικά με το εύρος των γωνιών, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν εργαλεία ΕΠ για να αναλύσουν διαφορετικές γωνίες κατασκευής, ενώ παράλληλα «επισκέπτονται» την πόλη της Φλωρεντίας. Έτσι μπορούν να συγκρίνουν το πως χρησιμοποιούνταν τα μαθηματικά στην αρχιτεκτονική, στο παρελθόν και στο παρόν.

Η σαφής **επικοινωνία (Communication)**, επικεντρώνεται στην έκφραση σκέψεων και απόψεων, με τρόπο ξεκάθαρο προς τους άλλους. Η βαθύτερη εκμάθηση, συνήθως περιλαμβάνει την ανταλλαγή αυτών που μαθαίνουν οι μαθητές στην τάξη, με άλλους στην κοινωνία. Ο Leadbeater (2008) τονίζει ότι «η μάθηση γίνεται καλύτερα, με τους ανθρώπους, παρά, σε ή για αυτούς».



Είναι αποτελεσματικότερο όταν οι μαθητές συμμετέχουν στη διαδικασία απόκτησης της γνώσης παρά όταν είναι απλώς παραλήπτες της. Επομένως, οι δραστηριότητες οι οποίες χρησιμοποιούν ΕΠ στην τάξη θα πρέπει να βασίζονται σε σχετικά, ρεαλιστικά σενάρια με στοιχεία ενεργούς επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών.

Η καινοτόμος μάθηση μέσω **συνεργασίας (Collaboration)**, προκαλεί τους μαθητές να εκφράσουν αλλά και να υπερασπιστούν τις θέσεις που υποστηρίζουν, να ανταλλάζουν διαφορετικές απόψεις, να αμφισβητούν θέσεις άλλων με επιχειρήματα και να ζητούν διευκρινίσεις. Είναι απαραίτητο να υπάρχει αμοιβαίο σεβασμός, συμβιβασμός, οικοδόμηση συναίνεσης και κοινής ευθύνης. Η συνεργασία αυτή μπορεί να επιτευχθεί βάζοντας τους μαθητές να εργαστούν σε ομάδες, όπου θα μπορούν να συγκρίνουν τα ευρήματα τους με τους συμμαθητές τους. Έτσι, θα μπορούν να εξετάσουν νέες χρήσεις για τις γνώσεις που αποκτούν, αλλά και να αναπτύξουν νέες ιδέες για μελλοντική εφαρμογή. Για παράδειγμα, δραστηριότητες μαθήματος οι οποίες χρησιμοποιούν εργαλεία ΕΠ, μπορούν να εκτελεστούν ανά ζεύγη ή σε μικρές ομάδες.

Η **δημιουργικότητα (Creativity)** περιλαμβάνει δυνατότητες όπως καταιγισμό ιδεών, βελτιστοποίηση υπάρχουσών ιδεών άλλων και δημιουργία νέων ιδεών, που να είναι απτές και χρήσιμες για τους άλλους. Η γνώση δεν είναι στατική. Επομένως, αυτό επιτρέπει ένα συνδυασμό απόκτησης γνώσης, αλλά και εξάσκηση σε εκμάθηση βασισμένη σε εργασίες, με επίκεντρο παγκόσμιες προκλήσεις που μπορούν να βοηθήσουν να συμμετέχουν ενεργά στο μάθημα. Για παράδειγμα, μια τάξη μπορεί να συνεργαστεί για να κατεβάσει ιδέες, σχετικά με τη μαθηματική πιθανότητα ενός γεγονότος το οποίο επιδιώκει να αντιμετωπίσει περιβαλλοντικές προκλήσεις. Και όλα αυτά, ενόσω παρακολουθεί ένα βίντεο 360 βίντεο σχετικά με τον αντίκτυπο των ορυκτών καυσίμων στον πλανήτη. Μέσα από αυτά τα παραδείγματα, παρατηρούμε ότι η ΕΠ, όταν χρησιμοποιείται στρατηγικά, μπορεί να ενισχύσει πραγματικά τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μπορούν, τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει στην τάξη, να τις εφαρμόσουν σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου, και να συμμετάσχουν σε έργα απαιτούν συνεχή ενασχόληση και συνεργασία (Barron & Darling-Hannibd 2008).

## **ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ / ΕΥΡΗΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΧΡΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΞΑΧΘΗΚΑΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΕΠ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΣΕ ΜΗ-ΤΥΠΙΚΑ ΚΑΙ ΤΥΠΙΚΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ**

Σε προηγούμενα κεφάλαια, εξετάσαμε πως κάποιες τεχνολογικές εξελίξεις, διατηρούν την εκπαίδευση και τα εργαλεία της σχετικά. Η ΕΠ είναι ένα τέτοιο εργαλείο, το οποίο κερδίζει σε δημοφιλία, καθώς το υλικό γίνεται όλο και πιο προσιτό για τη σχολική πραγματικότητα. Σε αυτή την ενότητα, θα δούμε κάποιες μελέτες που δείχνουν την επίδραση της ΕΠ στην εκπαίδευση:

## Διερεύνηση της Χρήσης των Τεχνολογιών ΕΠ στο Μάθημα των Μαθηματικών

Το 2017, ένα σχολείο στην κομητεία Hedmark (Νορβηγία), διενήργησε μια πιλοτική μελέτη διάρκειας έξι εβδομάδων, η οποία περιελάμβανε τέσσερις διαφορετικές τάξεις τριτοετών και τεταρτοετών μαθητών (34 μαθητές σχημάτισαν μια πειραματική ομάδα) στα μαθηματικά, εστιάζοντας στον πολλαπλασιασμό. Ο σκοπός της μελέτης, ήταν να εντοπίσει αν οι βασικές δεξιότητες των μαθητών στα μαθηματικά, θα βελτιωθούν χάριν στη χρήση Εικονικής Πραγματικότητας ως μέρος της μαθησιακής δραστηριότητας. Το εκπαιδευτικό κέντρο 'Practice-Based Education Research Center (SEPU)' παρακολούθησε τη διαδικασία, στο Πανεπιστήμιο 'Innlandet University College'. Οι μαθητές έκαναν μια δοκιμασία χαρτογράφησης στα μαθηματικά, πριν και μετά την εργασία.

Μια τάξη μαθηματικών με πεμπτοετείς μαθητές σε ένα άλλο σχολείο (31 μαθητές σχημάτισαν την ομάδα ελέγχου), το οποίο δεν χρησιμοποιούσε ΕΠ και έκαναν την ίδια ακριβώς εργασία.

Σε διάρκεια έξι εβδομάδων, στα πλαίσια δύο μαθημάτων, οι μαθητές χρησιμοποίησαν υλικό Oculus GearVR σε εργασίες που αφορούσαν βασικές αριθμητικές λειτουργίες. Ήταν μια παιγνιώδης εμπειρία, αφού μπορούσαν να κερδίζουν βαθμούς για κάθε σωστή απάντηση. Οι εκπαιδευτικοί είχαν στη διάθεση τους μια πλατφόρμα, στην οποία μπορούσαν να συνδεθούν και να παρακολουθούν την πρόοδο των μαθητών. Αυτό, τους επέτρεπε να συλλέγουν δεδομένα για κάθε μαθητή, σε διάρκεια χρόνου, παρά να τους βαθμολογούν απλά. Δημιουργοί από ΕΠ εκπαίδευση πιστεύουν ότι είναι πολύ σημαντικό για την εκπαίδευση του μέλλοντος να αντιμετωπίζεται τον κάθε μαθητή σαν ένα άτομο το οποίο εξελίσσεται και όχι μόνο κρίνοντας την απόδοσή τους[3].

School	Gender	N	Total Cohen's d	Effect Cohen's d
Control group/school	Boys	13	.04	
	Girls	18	.27	
Intervention group/school (VR)	Boys	12	.53	0,49
	Girls	23	.23	-0,04

Πηγή: [www.vreducation.no/pdf/vr-maths-report-NO.pdf](http://www.vreducation.no/pdf/vr-maths-report-NO.pdf)

Ο πιο πάνω πίνακας, δείχνει συγκριτικά την εξέλιξη αγοριών και κοριτσιών και από τις δύο ομάδες. Ένα αποτέλεσμα της τάξης του 0,49 σε περίοδο έξι εβδομάδων, θεωρείται ως μια σημαντική μεταβολή/βελτίωση. Από την άλλη, δεν έδειξαν κάποια ιδιαίτερη μεταβολή. Κατά τη διάρκεια του τεστ, αισθάνθηκα ναυτία, όταν χρησιμοποιούσαν γυαλιά ΕΠ. Επομένως, το χρησιμοποίησαν σε λιγότερο βαθμό από τα αγόρια.

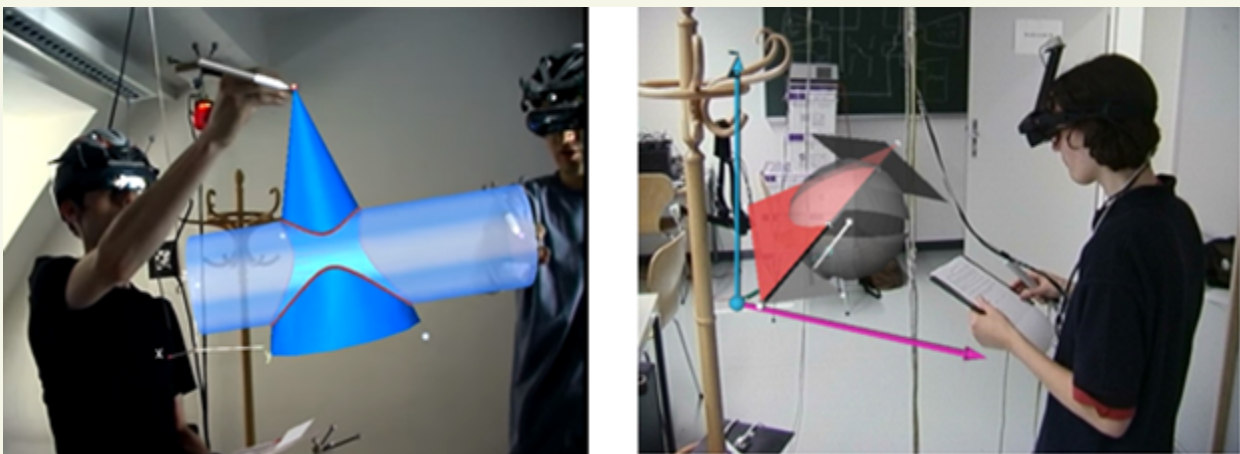
[3] [https://www.youtube.com/watch?v=o6Xlz\\_Afk9A](https://www.youtube.com/watch?v=o6Xlz_Afk9A)

## *Construct3D: εφαρμογή για εκπαίδευση μαθηματικών και γεωμετρίας στο γυμνάσιο!*

Το Δεκέμβριο του 2008, το Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο της Βιέννης στην Αυστρία, ολοκλήρωσε μια ερευνητική εργασία, ονόματι 'Construct3D', ένα κατασκευαστικό τρισδιάστατο εργαλείο σε ένα εμπυθιστικό εικονικό περιβάλλον, για την ανάπτυξη χωρικών ικανοτήτων.

Ο σκοπός του εργαλείου αυτού, ήταν να δημιουργήσει ένα απλό και διαισθητικό όργανο με φιλικό προς το χρήστη περιβάλλον. Οι ερευνητές ενσωμάτωσαν το συλλογικό σύστημα επαυξημένης πραγματικότητας Studierstube, το οποίο επιτρέπει στους μαθητές, εν μέρει, να δουν και να αλληλεπιδράσουν με τον πραγματικό κόσμο.

Περιλαμβάνει ένα βοηθητικό ακουστικό σύστημα για να δίδει ανατροφοδότηση ο μαθητής αλλά και για να έχει αλληλεπίδραση με τον καθηγητή. Τα κύρια πεδία εφαρμογής του στην εκπαίδευση μαθηματικών και της γεωμετρίας, είναι η διανυσματική ανάλυση, η περιγραφική γεωμετρία και η γεωμετρία γενικά. Το εργαλείο παρέσχε στους μαθητές μια σχεδόν απτή εικόνα περίπλοκων τρισδιάστατων αντικειμένων και σχημάτων.



Πηγή: <https://www.ims.tuwien.ac.at/projects/construct3d>

Κατά τη διάρκεια της έρευνας, πραγματοποιήθηκε στη Βιέννη μια άτυπη πιλοτική μελέτη, με τη συμμετοχή 14 μαθητών από 22 μέχρι 34 ετών, προκειμένου να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα του εργαλείου. Η αποστολή τους ήταν να επιλύσουν με τη βοήθεια ενός δασκάλου, ένα κατασκευαστικό παράδειγμα, εφαρμόζοντας την ανάλυση διανυσμάτων, όπως έχει διδαχθεί στη 10η τάξη στην Αυστρία. Μετά το πέρας της άσκησης αυτής, έπρεπε να ολοκληρώσουν μια σύντομη έρευνα αναφορικά με την όλη εμπειρία και τα εργαλεία.

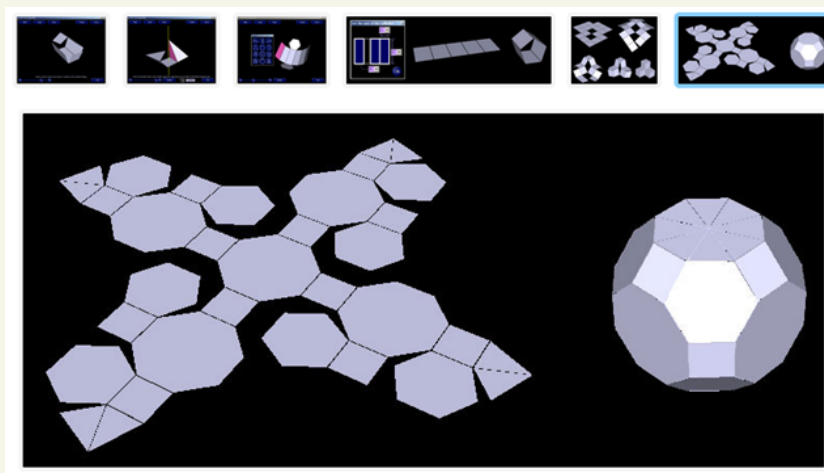
Οι μαθητές ήταν πολύ ικανοποιημένοι με την εμπειρία, ήθελαν να χρησιμοποιήσουν ξανά την τεχνολογία ΕΠ και το βρήκαν ως ένα εξαιρετικό εργαλείο για την εξερεύνηση των μαθηματικών, μέσα σε ένα 'παιχνιδιάρικο' περιβάλλον. Αρκετοί επισήμαναν ότι η απεικόνιση τρισδιάστατων σχημάτων, ήταν πιο πολύ πιο εύκολη με τη χρήση ΕΠ, από ότι με τις οθόνες υπολογιστών.

Ωστόσο, η παρουσία του δασκάλου ήταν απαραίτητη, καθώς χρειαζόταν η υποστήριξη του για να ξεπεραστούν κάποιες τεχνικές και σωματικές (6 συμμετέχοντες ένιωσαν ζαλάδες) δυσκολίες. Παρ' όλα αυτά, όλοι φαντάστηκαν διαφορετική χρήση του Construct3D, για επίλυση απλών προβλημάτων, στην εκπαίδευση μαθηματικών και γεωμετρίας.

*Πρόγραμμα DALEST (Developing an Active Learning Environment for the learning of Stereometry)*

Το πρόγραμμα DALEST συγχρηματοδοτήθηκε από την Ευρωπαϊκή Ένωση στα πλαίσια του Προγράμματος Σωκράτης, Minerva, επιλογή 2005. Για τη διεκπεραίωση του έργου, συνεργάστηκε ένας διεθνής συνασπισμός από πέντε Πανεπιστήμια. Το Πανεπιστήμιο Κύπρου, το Πανεπιστήμιο του Σαουθάμπτον, το Πανεπιστήμιο Λισαβόνας, το Πανεπιστήμιο Σόφιας, το Πανεπιστήμιο Αθηνών, οι N.K.M Netmasters και η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Οι εφαρμογές που αναπτύχθηκαν, αποσκοπούσαν στο να βοηθήσουν τους μαθητές δημοτικής και μέσης εκπαίδευσης, να σχεδιάσουν και να δημιουργήσουν μαθηματικά αντικείμενα μέσω παιδαγωγικών σεναρίων, κατάλληλα για τη διδασκαλία στερεομετρίας και την ανάπτυξη χωροταξικής σκέψης. Υπήρχαν διαφορετικά επίπεδα δυσκολία, και οι μαθητές έπρεπε να λύσουν κάποια μαθηματικά προβλήματα, μετρώντας κόβοντας, (ξε)διπλώνοντας και χειρίζοντας σχήματα για να δημιουργήσουν μαθηματικά αντικείμενα.



Πηγή: <http://pavel.it.fmi.uni-sofia.bg/elica/dalest/on.html>

Οι μαθητές οι οποίοι δοκίμασαν τις εφαρμογές και χειρίστηκαν διάφορα δίκτυα, πέρασαν από τη δισδιάστατη σε τρισδιάστατη μορφή. Όλοι οι μαθητές έχουν εκφράσει την ικανοποίηση μετά την εμπειρία τους αυτή, ενώ ταυτόχρονα, δεν περιθωριοποίησαν εντελώς τον παραδοσιακό τρόπο εργασίας της δημιουργίας χάρτινων ομοιωμάτων χρησιμοποιώντας χαρτί και ψαλίδι. Η γενική εντύπωση που υπήρχε μετά τη δοκιμή του εργαλείου, ήταν ότι τους έδωσε περισσότερο χώρο για να παίξουν και να πειραματιστούν με διάφορες ιδέες τις οποίες οι μαθητές βρήκαν συναρπαστικές. (Τα εργαλεία διατίθενται στην ιστοσελίδα του έργου: DALES PROJECT).

Καταληκτικά, βάση των παραδειγμάτων τα οποία παραθέσαμε πιο πάνω, μπορούμε να πούμε ότι:

Παρόλο που δεν υπάρχουν αρκετά τεκμηριωμένα παραδείγματα χρήσης της τεχνολογίας ΕΠ στην εκπαίδευση μαθηματικών, οι αναφορές ερευνητών και μαθητών, οι οποίοι χρησιμοποίησαν την τεχνολογία ΕΠ, είναι ελπιδοφόρες, και είναι ένα πεδίο το οποίο αξίζει να εξερευνηθεί. Με τις αισιόδοξες αυτές απόψεις σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας αυτής, έχουμε ένα πολύτιμο εύρημα, τονίζοντας το γεγονός ότι η ΕΠ πρέπει να λειτουργεί συμπληρωματικά αλλά σε καμία περίπτωση να υποκαθιστά την εκπαίδευση των μαθηματικών.

## **ΤΙ ΚΑΘΙΣΤΑ ΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΕΠ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΚΡΙΤΗΡΙΑ**

Η ανάπτυξη περιεχομένου ΕΠ βρίσκεται στα αρχικά της στάδια, και η προοπτική εφαρμογής της ιδέας αυτής της εμπυθιστικής εμπειρίας στην εκπαίδευση, προσελκύει κάθε χρόνο, περισσότερους ενδιαφερόμενους. Παραθέτουμε πιο κάτω κάτω μερικά από τα ήδη υπάρχοντα παραδείγματα Μαθηματικών εργαλείων ΕΠ.

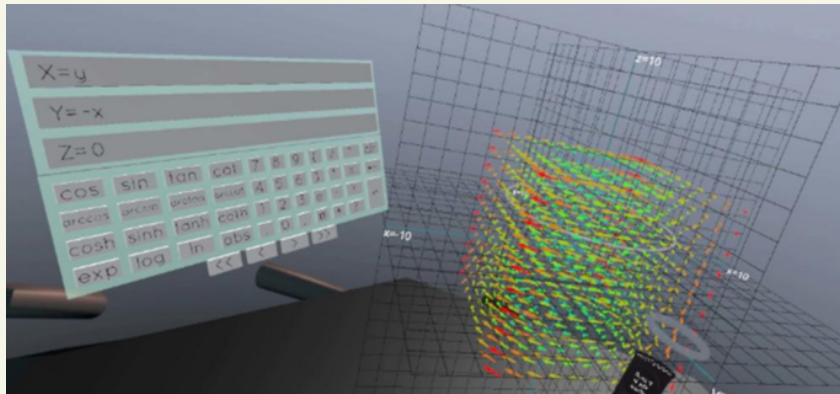


## CalcFlow

Το CalcFlow είναι μια δωρεάν, ελεύθερη πηγή λογισμικού, το οποίο έχει αναπτυχθεί από τη εταιρεία Nanome Inc. Απαιτείται η χρήση ενός εξοπλισμού εικονικής πραγματικότητας, Oculus ή Vive. Για τους αρχάριους χρήστες, οι δημιουργοί των συστημάτων αυτών έχουν δημιουργήσει μια ολόκληρη σειρά εκπαιδευτικών βίντεο στο Youtube.

*Παιδαγωγικός στόχος:* Επιτρέπει τη μελέτη και απεικόνιση του υπολογισμού διανυσμάτων σε ένα διαδραστικό περιβάλλον. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μαθηματική μοντελοποίηση με τη χρήση τρισδιάστατων γραφικών, ενώ οι παραμέτροι ρυθμίζονται στην πορεία. Με τον τρόπο αυτό μπορείς να δημιουργήσεις τη δική σου παραμετροποιημένες εξισώσεις και πεδία διανυσμάτων.

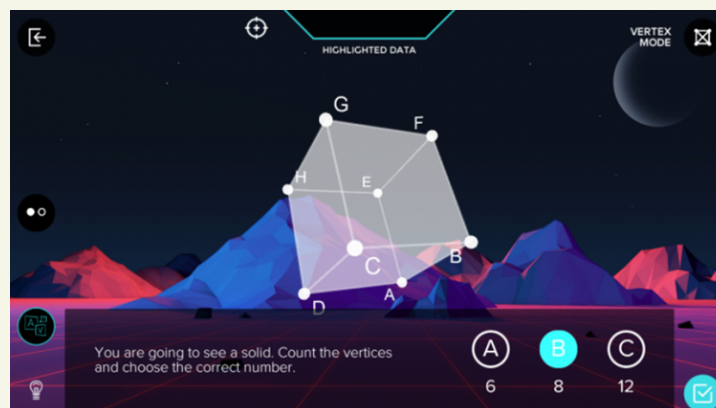
*Ομάδα στόχος:* Στοχεύει σε μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας, που βρίσκονται στις τελευταίες τάξεις του Λυκείου, ενώ μπορεί επίσης να εφαρμοστεί και στην ανώτατη εκπαίδευση.



Πηγή : <https://vrroom.buzz/vr-news/trends/get-ready-love-math-vr-calculator>

## VR Math

Το VR Math αποτελεί μέρος του VARP Edu, η οποία είναι μια εκπαιδευτική πλατφόρμα διαφόρων θεμάτων, που βοηθά από τη μια τους μαθητές να κατανοούν και τους εκπαιδευτικούς να διδάσκουν τρισδιάστατη Γεωμετρία. Το VR Math, είναι μια αδειοδοτημένη συνδρομητική υπηρεσία. Το ίδιο το περιεχόμενο είναι προσβάσιμο μέσω του συνδυασμού τηλεφώνου και απλού χαρτονένιου σετ ΕΠ ή σε οθόνη αφής 360 μοιρών. Για την ώρα (Μάιος 2019), βρίσκεται ακόμη σε δοκιμαστικό στάδιο.



Πηγή : <http://kornelmeszaros.com/vr-math/>



**Παιδαγωγικός στόχος:** Εστιάζει κυρίως στη γεωμετρία και στην ανάπτυξη της χωροταξικής αντίληψης και κατανόησης στους μαθητές. Έχει ένα εύρος ενδιαφερόντων χαρακτηριστικών, συμπεριλαμβανομένου της ικανότητας για πρόσβαση των μαθητών σε υλικό στον δικό/ή του/της ρυθμό, προωθώντας έτσι την αυτοδιδασκαλία.

**Ομάδα στόχος:** Μαθητές δημοτικής και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

### CalculusVR

Αυτή η δωρεάν εφαρμογή, είναι ένα έργο το οποίο τρέχει με πάθος ο Δρ. Nicholas Long, του Τμήματος Μαθηματικών και Στατιστική του Πανεπιστημίου της Πολιτείας του Όστιν. Το Calculus, επιτρέπει στους χρήστες να απεικονίσουν τις έννοιες των υπολογισμού πολλαπλών μεταβλητών, σε ένα περιβάλλον εικονικής πραγματικότητας. Για να το χρησιμοποιήσετε το μόνο που χρειάζεστε, είναι ένα τηλέφωνο και ένα εξοπλισμό Google Cardboard.



Πηγή: <https://longnesfa.wordpress.com/calculus-in-virtual-reality-project/>

**Παιδαγωγικός στόχος:** Το περιεχόμενο καλύπτει διάφορες ενότητες, όπως: δισδιάστατες και τρισδιάστατες Συντεταγμένες και Γραφικά, Καμπύλες και Επιφάνειες, εξισώσεις μίας μεταβλητής για εξεύρεση της αξίας διανυσμάτων, εξισώσεις πολλαπλών μεταβλητών. Οι χρήστες μπορούν να καθορίσουν τα δικά τους αντικείμενα, τα οποία θα απεικονίσουν καθώς επίσης και το να κάνουν μαθήματα στη γεωμετρία και τον υπολογισμό εξισώσεων με πολλαπλές μεταβλητές, και τις αντίστοιχες επιφάνειες.

**Ομάδα στόχος:** Φοιτητές Πανεπιστημίου

### MashUp Math

Το MashUp Math είναι μια ομαδική πρωτοβουλία νέων εκπαιδευτικών που πιστεύουν ότι οι μαθητές μπορούν να μαθαίνουν μαθηματικά με διάφορους τρόπους, και ότι η εφαρμογή μιας προσέγγισης που να είναι κατάλληλη για όλους, είναι αναποτελεσματική. Στην ιστοσελίδα της πρωτοβουλίας αυτής, [www.mashupmath.com](http://www.mashupmath.com), υπάρχει μια πληθώρα ελεύθερων πηγών, όπως βίντεο, φύλλα εργασίας και μαθηματικών γρίφων. Το κανάλι τους στο Youtube (στην Αγγλική γλώσσα), ενημερώθηκε για τελευταία φορά το 2017, αλλά διαθέτει πάνω από 100 σύντομα βίντεο που επεξηγούν με σαφή τρόπο διάφορες μαθηματικές προκλήσεις, δίδοντας μεγάλη έμφαση στους χειρισμούς και στην μη-τυπική προσέγγιση.



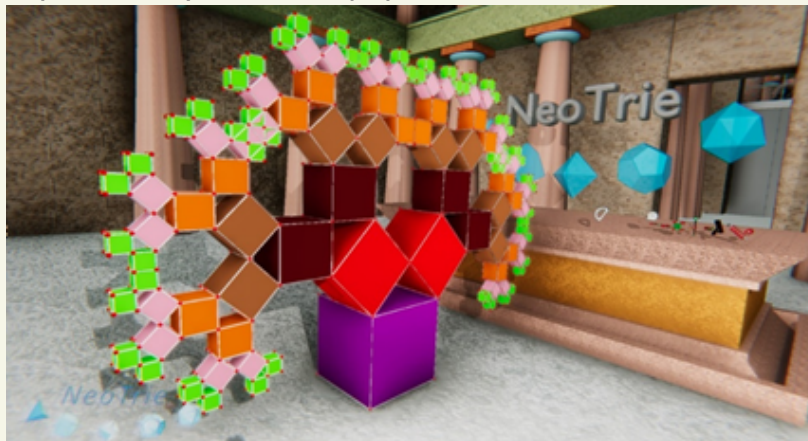
Πηγή: <https://www.virtualiteach.com/single-post/2018/06/04/Maths-in-VR>

**Παιδαγωγικός στόχος:** Διδάσκει μαθηματικά, με ένα προσβάσιμο και διασκεδαστικό τρόπο. Τα υλικά καλύπτουν θέματα όπως: άλγεβρα, γεωμετρία, μαθηματικά σε επιπέδου δημοτικής και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το MashUp Math άρχισε να πειραματίζεται με βίντεο 360° για να οργανώσει προβλήματα άλγεβρας. Είναι μια απλή ιδέα που θα μπορούσε να αναπαραχθεί εύκολα στην τάξη, με κάμερα 360°.

**Ομάδα στόχος:** Μαθητές 8-15 χρόνων.

### **33D Geometry in Virtual Reality by NeoTrieVR**

Αυτό είναι ένα έργο που τρέχει ο José L. Rodríguez του Πανεπιστημίου της Αλμερίας. Βρίσκεται υπό δημιουργία, σε συνεργασία με την Virtual Dor. Ο στόχος του λογισμικού, είναι να επιτρέπει στους χρήστες να δημιουργούν, να χειρίζονται και να αλληλεπιδρούν με τρισδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα και τρισδιάστατα μοντέλα, γενικά διαφόρων τύπων.



Source: <http://virtualdor.com/NeoTrie-VR/>

**Παιδαγωγικοί στόχοι [4]:** Να εξετάσει απλές πτυχές της γεωμετρίας σε τρισδιάστατη μορφή. Να εισάγει την τρισδιάστατη γεωμετρία και μοντελοποίηση που προορίζεται για τρισδιάστατη εκτύπωση. Να αναπτύξει χειροτεχνήματα και τρισδιάστατες οπτικές ικανότητες. Να διεγείρει τις ικανότητες επαγωγικού και απαγωγικού συλλογισμού. Να τονίσει την ομαδική εργασία και θετική αλληλεξάρτηση, και να παρακινήσει τους μαθητές μέσω ψυχαγωγικών συνεργατικών και ανταγωνιστικών παιχνιδιών.

**Ομάδα στόχος:** καθώς το έργο βρίσκεται στο στάδιο της δημιουργίας, η ακριβής ομάδα στόχος δεν έχει καθοριστεί ακόμη.

[1] <http://virtualdor.com/NeoTrie-VR-Edu/>

# ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟ ΣΥΝΔΙΑΣΜΟ ΤΗΣ ΜΗ- ΤΥΠΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΜΕ ΤΙΣ ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΕΣ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΕΠ

## Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΕΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ ΣΕ ΜΙΑ ΛΥΣΗ ΕΠ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΣΕ ΣΕΝΑΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

### Εισαγωγή

Όταν χρησιμοποιούμε ένα μαθηματικό μοντέλο, ένα μαθηματικό μοντέλο, απλοποιούμε μια πραγματική κατάσταση, ετοιμάζοντας ένα αφηρημένο σχέδιο. Κάνοντας αυτό, μπορούμε να εξηγήσουμε, να περιγράψουμε και να προβλέψουμε πτυχές του πραγματικού κόσμου, μέσω αναπαραστάσεων, ερμηνειών δηλαδή της πραγματικότητας. Τα διαγράμματα, γραφήματα, συμβολικές εκφράσεις είναι μερικά από τα παραδείγματα τέτοιων αναπαραστάσεων. Το πρόβλημα είναι, ότι οι μαθητές, πολλές φορές αντικρύζουν τις αναπαραστάσεις αυτές μονάχα ως το τελικό προϊόν, ενώ αδυνατούν να τις αντιληφθούν ως ένα εργαλείο που θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν την πραγματικότητα. Μπορεί αυτή η αντιμετώπιση να αλλάξει με τη χρήση του μοντέλου της ΕΠ;

Πιο κάτω, ακολουθούν δύο τρόποι επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, με τη χρήση μοντελοποίησης:

*Μαθαίνοντας να μοντελοποιούν:* ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα μοντέλο της πραγματικότητας. Για να γίνει αυτό, κάθε στοιχείο του ιδίου του μοντέλου πρέπει να γίνεται απόλυτα κατανοητό. Κάτι τέτοιο δεν είναι εύκολο, και θα μπορούσε περισσότερο να θεωρηθεί περισσότερο ως εκπαιδευτικό στόχος, παρά ως ένας τρόπος να διδάξουμε νέες ιδέες.

*Μαθαίνοντας με μοντέλα/πρότυπα:* η προσέγγιση αυτή, ενθαρρύνει να λύσουν προβλήματα χρησιμοποιώντας ήδη υπάρχοντα μοντέλα. Με αυτό τον τρόπο, οι μαθητές, μαθαίνουν αλλάζοντας τις παραμέτρους και παρατηρώντας τη σχέση μεταξύ όλων των αντικειμένων του μοντέλου. Για να χρησιμοποιήσουμε όμως την προσέγγιση αυτή, πρέπει να δημιουργήσουμε συγκεκριμένα μοντέλα, δραστηριότητες για κάθε τομέα μαθηματικών. Τα μοντέλα αυτά, μπορούν εύκολα να δημιουργηθούν με τη χρήση ΕΠ.

Το μέρος αυτό θα βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς στην επιλογή κατάλληλων θεματικών και μαθηματικών εννοιών για να διδαχθούν από εφαρμογές ΕΠ, σε ένα μη-τυπικό σενάριο.

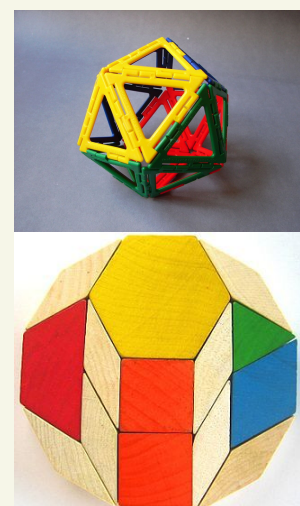
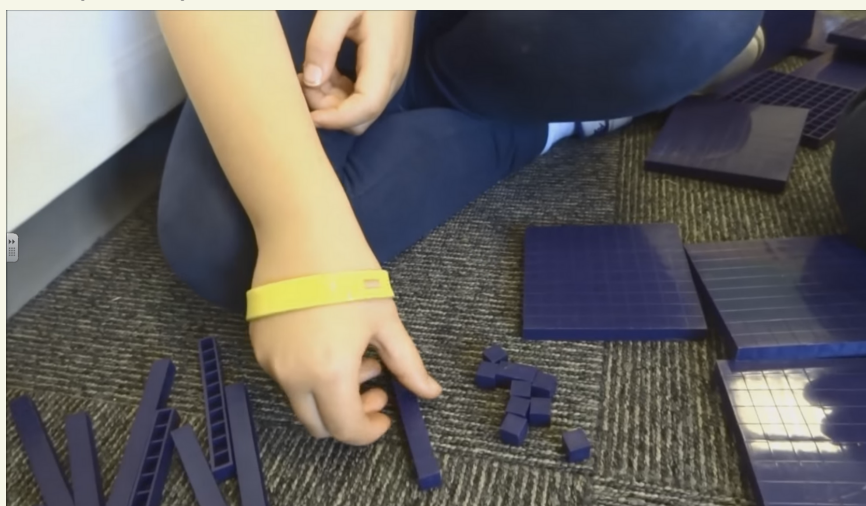


## Βήμα 1 – Πως να επιλέξετε θέματα και μαθηματικές έννοιες

Εάν οι εκπαιδευτικοί θέλουν οι μαθητές τους να μαθαίνουν, κάνοντας, τότε πρέπει να επιλέγουν θέματα στα οποία θα τους ζητείται να αλληλεπιδρούν. Για να σχεδιάσουν ένα επιτυχημένο μη-τυπικό σενάριο μαθήματος, οι εκπαιδευτικοί, πρέπει να χρησιμοποιήσουν εργαλεία τα οποία να επιτρέπουν στους μαθητές να έχουν ένα ενεργό ρόλο στη διαδικασία μάθησης. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση βοηθημάτων.

### *Η σημασία των υλικών*

Κάτι με το οποίο οι καθηγητές μαθηματικών πρέπει να είναι καλά εξοικειωμένοι, είναι τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται στο μάθημα. Τα υλικά αυτά, είναι χειροπιαστά μοντέλα, τα οποία περιλαμβάνουν μαθηματικές έννοιες, δηλαδή πραγματικά ή εικονικά αντικείμενα, τα οποία, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και να μετακινηθούν από τους μαθητές. Παραδείγματα τέτοιων υλικών είναι πλακάκια άλγεβρας, κομμάτια κλασμάτων, μοτίβο μπλοκ, γεωμετρικά στερεά. Βάση δέκα μπλοκ.



Πηγές: Βάση 10 μπλοκ (στα αριστερά):

[https://en.wikipedia.org/wiki/Base\\_ten\\_blocks#/media/File:Dienes\\_blocks\\_used\\_by\\_a\\_8\\_year-old\\_student.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Base_ten_blocks#/media/File:Dienes_blocks_used_by_a_8_year-old_student.png).

Ένα πολύεδρο - εικοσάεδρο (πάνω δεξιά):

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polydron\\_09489.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polydron_09489.jpg).

Μοτίβο μπλοκ (κάτω δεξιά):

[https://en.wikipedia.org/wiki/Pattern\\_Blocks#/media/File:Wooden\\_pattern\\_blocks\\_dodecagon.JPG](https://en.wikipedia.org/wiki/Pattern_Blocks#/media/File:Wooden_pattern_blocks_dodecagon.JPG)

Από ιστορικής άποψης, ήδη από τον περασμένο αιώνα, κάποιες μελέτες (Driscoll 1983, Sowell 1989, Suydam 1986), είχαν ήδη δείξει ότι, οι μαθητές, ανεξαρτήτως επιπέδου και ικανοτήτων, μπορούν να βοηθηθούν από τη χρήση υλικών, σε κάθε προσπάθεια να επεξηγήσουν και να διευκρινίσουν μια έννοια. Οι Suydam και Higgins (1976), για παράδειγμα, απέδειξαν ότι η χρήση υλικών στα μαθήματα, μπορεί να βελτιώσει τις μαθηματικές δεξιότητες και ικανότητες, σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό, παρά όταν δεν χρησιμοποιούνται. Αυτό υποδηλώνει, ότι κάθε μαθητής, θα πρέπει να έχει την ευκαιρία να αλληλεπιδρά με τέτοια υλικά.

Η χρήση τους δεν πρέπει να περιορίζεται στο να παρουσιάζονται από τους καθηγητές. Για να έχει νόημα και να είναι αποτελεσματική η χρήση, τους πρέπει να χρησιμοποιούνται από τους μαθητές σε διαδραστικές δραστηριότητες.

## Βήμα 2 – Ποιες είναι οι κατάλληλες θεματικές και μαθηματικές έννοιες

Η χρήση της Εικονικής Πραγματικότητας, προσφέρει μεγάλες προοπτικές στην εκπαίδευση των μαθηματικών και γεωμετρίας, αφού καθιστά δυνατή την εξεύρεση καινοτόμων τρόπων διδασκαλίας των μαθηματικών, δίδοντας την ευκαιρία στους μαθητές να μελετήσουν ολοκληρωμένα, πιο δύσκολα προβλήματα, τα οποία δεν μπορούσαν να το πράξουν παλαιότερα.

Μερικά από τα πιο κατάλληλα θέματα, τα οποία διδάσκονται στα πλείστα σχολεία ανά το παγκόσμιο, οι οποίοι θα μπορούσαν να διδαχθούν σε περιβάλλοντα ΕΠ, είναι τα ακόλουθα:

- Βασικές μαθηματικές ικανότητες ή/και έννοιες, όπως οι τέσσερις βασικές πράξεις, κλάσματα, διανοητικοί υπολογισμοί (για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση).
- Τριγωνομετρία, άλγεβρα διανυσμάτων, τρισδιάστατη γεωμετρία, οπτικοποιήσεις γραφημάτων και σκιαγραφήσεις καμπυλών, και άλλες τρισδιάστατες εφαρμογές και προβλήματα (δευτεροβάθμια εκπαίδευση).
- Ανάλυση (πολύπλοκες εξισώσεις), γραμμική άλγεβρα, διαφορικοί υπολογισμοί και διαφορική γεωμετρία, προβολική γεωμετρία (για ανώτερη εκπαίδευση/λύκειο).

Στο Πρώτο Κεφάλαιο, για παράδειγμα, έχουμε δει παραδείγματα παιδαγωγικών εργαλείων, τα οποία, χρησιμοποιούν μη-τυπικές μεθόδους διδασκαλίας μαθηματικών. Όπως έχει λεχθεί, η μορφή μπορεί να είναι πολύ διαφορετική. Ορισμένα από αυτά τα εργαλεία, μπορούν να μετατραπούν και κατ' επέκταση να αναπτυχθούν περαιτέρω, χρησιμοποιώντας Εικονική Πραγματικότητα.

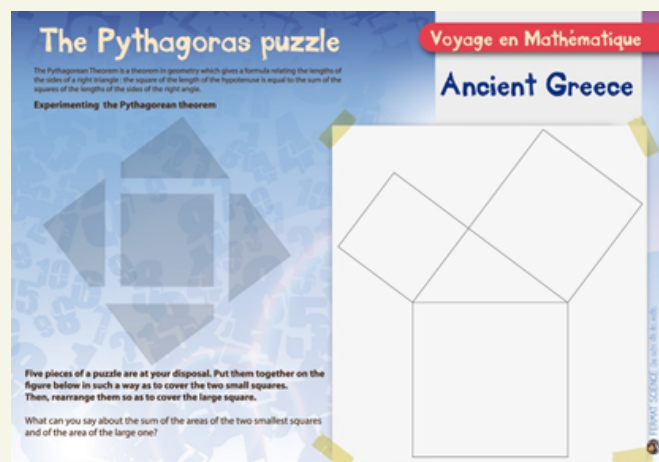
Ας πάρουμε το παράδειγμα, της χρήσης πλακιδίων για να κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς του Πυθαγόρειου θεωρήματος, και μετέπειτα να αναλύσουμε πιθανή μετατροπή του σε μια πρακτική λύση ΕΠ.

Το Πυθαγόρειο θεώρημα έχει την ιδιότητα να υπολογίζει το μήκος της τρίτης πλευράς ενός τριγώνου, όταν ήδη γνωρίζουμε τα μήκη των άλλων δύο.

### Μαθηματική φόρμα:

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι  $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$

Ο στόχος είναι, χειρίζοντας τα ξύλινα κομμάτια του ψηφιδωτού παζλ, να αποδείξουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα.





### Βήμα 3 – Πως να ενσωματώσετε το θέμα με τη μαθηματική έννοια, σε ένα μη-τυπικό σενάριο

Η Εικονική Πραγματικότητα πρέπει να χρησιμοποιείται για την προσαρμογή του παραδοσιακού μαθηματικού υλικού σε απτή, ορατή και κατανοητή μορφή. Η λήψη των πληροφοριών με την όραση γίνεται με παθητικό τρόπο. Εν αντιθέσει με τη λήψη πληροφοριών δια της αφής, που είναι ένας ενεργός και αμφίδρομη διαδικασία (Sourin & Wei 2009). Η διαδικασία αυτή πρέπει να βοηθά τους εκπαιδευόμενους στην κατανόηση περίπλοκων, αφηρημένων και μη διαισθητικών εννοιών και συστημάτων, χειρίζοντας σχετικές παραμέτρους, παίρνοντας διαφορετικές οπτικές γωνίες σε πραγματικό χρόνο. Πρέπει επίσης να ενισχύει τη διδασκαλία, προσομοιάζοντάς την εμπειρία με παιχνίδι, καθώς βάζοντας τρισδιάστατα γραφικά στα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα, είναι συναρπαστικά, διαδραστικά και ευέλικτα. Οι μαθητές που είναι ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με βιντεοπαιχνίδια, είναι ενθουσιώδεις να παίξουν διαδραστικά παιχνίδια. Αυτό τους διεγείρει το ενδιαφέρον να χτίσουν τη γνώση μέσω της ενεργού μάθησης.

Το εργαλείο που παρουσιάστηκε πιο πάνω στο Βήμα 2 είναι ένα καλό παράδειγμα ενσωμάτωσης μια μαθηματικής έννοιας, σε αυτή την περίπτωση το Πυθαγόρειο Θεώρημα, σε ένα μη-τυπικό σενάριο, δεδομένου ότι προσφέρει πολλές ευκαιρίες μάθησης. Από τη μια στη γεωμετρία (π.χ. χαρακτηριστικά του σχήματος, λεξιλόγιο, στρώσιμο), και από την άλλη στην ιστορία των μαθηματικών (με την ιστορία της Αρχαίας Ελλάδας κλπ.). Επιπρόσθετα, συνδέεται με τη διδακτέα ύλη των σχολείων στην Ευρώπη. Οι εκπαιδευτικοί στόχοι είναι πολύ σημαντικοί. Το υλικό αυτό ήδη δουλεύει πολύ καλά σε μαθήματα μαθηματικών. Όντως, η μη-τυπική προσέγγιση του θεωρήματος αυτού, επιτρέπει την καλύτερη εκμάθηση και κατανόησή του.

Η μεταφορά του «Πυθαγόρειου Παζλ» σε ΕΠ, μπορεί να αυξήσει σημαντικά τις παιδαγωγικές δυνατότητες σε σύγκριση με τα ήδη υπάρχοντα εργαλεία. Αυτός είναι και ένας από τους λόγους που καθιστούν σημαντικό να ορίζεται εκ των προτέρων ένας ξεκάθαρος στόχος. Σε αυτή την περίπτωση, θέλουμε ο μαθητής να γνωρίζει απ' έξω το Πυθαγόρειο θεώρημα; Ή να αποτελεί μια πρώτη επαφή με την ιστορία των μαθηματικών; Ή και τα δύο; Ο εκπαιδευτικός στόχος πρέπει να γίνεται ρητά σαφής από την αρχή. Θεωρείται επίσης απαραίτητο να καθοριστούν εξ αρχής, όλες οι δραστηριότητες οι οποίες που θα μπορούσαν ενδεχομένως να προκύψουν από τους εκπαιδευτικούς στόχους.

Για παράδειγμα, σε σχέση με το παράδειγμά μας, αυτό του υπολογισμού του Πυθαγόρειου Θεωρήματος με τη χρήση πλακιδίων, εκτός από τον εικονικό χειρισμό, που θα μπορούσε να φέρει τα ίδια αποτελέσματα όπως και στην πραγματικότητα, ο/η μαθητής/τρια θα μπορούσε επιπλέον να κάνει τα εξής:

- Να επιλύσει άλλες πράξεις που αποδεικνύουν αυτό το θεώρημα,
- Να επαληθεύσει το θεώρημα με μαθηματικό τρόπο και να βρει τον τύπο του,
- Να δουν ένα διασκεδαστικό βίντεο που παρουσιάζει το Πυθαγόρειο Θεώρημα (παράδειγμα <https://www.youtube.com/watch?v=YompsDIEdte>)

- Να αυτό-χρονομετρηθεί και να ανταγωνιστεί τους φίλους του/της.
- Να μάθει περισσότερα για τη ζωή του μαθηματικού Πυθαγόρα ακούγοντας το ηχητικό ή βλέποντας το βίντεο στον ακόλουθο σύνδεσμο:  
<https://www.youtube.com/watch?v=qmoxwZCiWEM&feature=youtu.be>
- Να μελετήσει βιβλιογραφία που ασχολείται με έργα που έγιναν σχετικά με το θεώρημα αυτό αλλά και με τα έργα του μαθηματικού.
- Ή ακόμη και να «συναντήσουν» τον ίδιο τον Πυθαγόρα και να του θέσουν ερωτήματα σχετικά με την εποχή του και το θεώρημά του.
- Να δημιουργήσει ένα Πυθαγόρειο δέντρο (βλ. παρακάτω εικόνα),



#### **Βήμα 4 – Πως εισάγουμε καινοτόμες τεχνολογίες και ήδη υπάρχουσες εφαρμογές μαθηματικών, σε μορφή ΕΠ, σε ένα μη-τυπικό σενάριο;**

Στη συνέχεια, πρέπει να επιλέξουμε αν ο θεατής (μαθητής) θα βρίσκεται στο επίκεντρο της δράσης, ή αν θα βρίσκεται σε άλλες θέσεις. Επίσης, θα αλληλεπιδρά ή όχι; Θα υπάρχει βίντεο 360° ή τρισδιάστατη μοντελοποίηση

Σε κάθε περίπτωση, τα συστήματα εκμάθησης ΕΠ και τρισδιάστατων γραφικών πρέπει να ενσωματωθούν σε ένα μη-τυπικό σενάριο, με τρόπο που να προσομοιάζει με παιχνίδι. Για καλύτερα αποτελέσματα, οι εφαρμογές μαθηματικών σε μορφή ΕΠ, πρέπει να πληρούν αυτά τα χαρακτηριστικά, σύμφωνα με τον Breuer (2011):

*Διαδραστικότητα:* εκμάθηση πράττοντας.

*Βασισμένα στη χρήση πολυμέσων:* οπτικοποίηση/προετοιμασία περιεχόμενου και ανατροφοδότησης με τη χρήση τρισδιάστατων προτύπων, ήχου κτλ.

*Συμμετοχή:* το παιχνίδι θα πρέπει να είναι συναρπαστικό για να κρατά την προσοχή των χρηστών, ώστε να μην αποσπώνται από διάφορους περισπασμούς.

*Δοκιμασία:* αυξημένη δυσκολία αλλά προσιτή για αρχάριους. Το παιχνίδι βέβαια πρέπει πάντοτε να δοκιμάζει τις ατομικές ικανότητες των παικτών και να τους κρατά συνεχώς το ενδιαφέρον τους.

*Ανταμοιβή:* οι ανταμοιβές και η ανατροφοδότηση σχετικά με την εξέλιξη πρέπει να προωθούν την αυτό-αποτελεσματικότητα και να δίδουν κίνητρα.

*Κοινωνική εμπειρία:* παροχή καναλιών επικοινωνίας για να συνδέονται οι παίκτες μεταξύ τους

## **Βήμα 5 – Το πλαίσιο των Μέσων, Τεχνικών και Περιβάλλοντος που θα μπορούσαν να ενισχύσουν την εκπαιδευτική διαδικασία**

Τώρα, καλούμαστε να λάβουμε τις τελικές αποφάσεις σχετικά με τη θέσπιση του πλαισίου σχετικά με το περιβάλλον του εργαλείου μας, σε περίπτωση που εμείς είμαστε οι δημιουργοί/κατασκευαστές του εργαλείου/εφαρμογής ΕΠ. Στοιχεία, όπως η διακόσμηση, ο ήχος (στίχοι, μουσική) και η χωροταξικότητα, μπορούν να προσδώσουν ζωή στο σενάριο.

Ποιος θα είναι ο πιο σχετικός εκπαιδευτικός στόχος στο παράδειγμά μας, θα επιλέξουμε να δημιουργήσουμε ξανά την Αρχαία Ελλάδα του Πυθαγόρα, ένα «παιχνιδιάρικο» κόσμο ή ένα «γεωμετρικό» κόσμο; Πρέπει να έχουμε κλασική μουσική για καλύτερη συγκέντρωση, με ρυθμό που να δίδει κίνητρο ή πιο επίκαιρη για να κάνει τις επαναλαμβανόμενες εργασίες λιγότερο περιοριστικές, ώστε να βοηθηθεί οι μαθητές να είναι αποτελεσματικότεροι στην επίλυση προβλημάτων; Θα υπάρχει μια «εξωτερική» φωνή ή αλληλεπίδραση να γίνεται γραπτώς; Μια ιδέα είναι να δημιουργήσουμε διάφορα ξεχωριστά περιβάλλοντα για κάθε άσκηση/εργασία που δίνονται στο «Πυθαγόρειο Παζλ».

Σε περίπτωση που δεν στοχεύουμε που δεν στοχεύουμε στη δημιουργία ενός εικονικού εργαλείου/εφαρμογής από την αρχή, θα μπορούσαμε εναλλακτικά να εργαστούμε πάνω σε ήδη υπάρχοντα εικονικά υλικά, τα οποία, απευθύνονται στα θέματα και στις έννοιες που θέλουμε και εμείς να διδάξουμε. Υπάρχουν διαθέσιμες στο εμπόριο κάποια έτοιμα προς χρήση λογισμικά, κατάλληλα για εκμάθηση και διδασκαλία, όπως:

Mathcad (<https://www.ptc.com/en/>);

Maple (<https://www.maplesoft.com/>);

Mathematica (<http://www.wolfram.com/mathematica/>);

MATLAB (<https://uk.mathworks.com/products/matlab.html>);

Geometer's Sketchpad (<http://www.dynamicgeometry.com/>).

Τα εργαλεία αυτά δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα να έρθουν σε επαφή με εικόνες, χωρίς όμως να βιώνουν αυτή την εμπειρία να εμπυθιστούν μέσα σε αυτό το τρισδιάστατο περιβάλλον: αυτή η έλλειψη της ενεργού εμπλοκής, μπορεί να έχει αρνητική επίπτωση στην ποιότητα της διδακτικής εμπειρίας. Παρόλα αυτά όμως, εξακολουθεί να είναι ένα έγκυρο συμπληρωματικό εργαλείο ενδυνάμωσης των μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών.

## Βήμα 6 – Δημιουργία της εμπειρίας

Αφότου η αρχιτεκτονική της υπό δημιουργίας εφαρμογής, έχει καθοριστεί, το μόνο που απομένει είναι να δημιουργήσουμε τα διάφορα στοιχεία, το οποίο θα συνθέτουν το «Πυθαγόρειο Παζλ» ΕΠ ή οποιοδήποτε άλλο πρακτικό σενάριο, το οποίο θεωρείται κατάλληλο να μετατραπεί σε εργαλείο ΕΠ.

### ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

Για να χρησιμοποιήσουμε ΕΠ στην τάξη, χρειάζεστε τουλάχιστον δυο πράγματα: ένα έξυπνο τηλέφωνο, το οποίο να έχει τη δυνατότητα να κατεβάζει/τρέχει εφαρμογές ή αρχεία βίντεο, και ένα εξοπλισμό ΕΠ. Τα κινητά τηλέφωνα τύπου Android που διαθέτουν ανιχνευτές Γυροσκοπίου και Μαγνητόμετρου, είναι συμβατά με ΕΠ. Οι πλείστες συσκευές μεσαίας μέχρι υψηλής τεχνολογίας διαθέτουν ήδη ενσωματωμένο γυροσκόπιο και μαγνητόμετρο, και επομένως μπορούν να συνοδεύσουν «τέλεια» Εικονική/Επαυξημένη Πραγματικότητα. Σε ότι αφορά λογισμικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εφαρμογές που είτε είναι διαθέσιμες δωρεάν είτε χρειάζεται να πληρώσουμε, ή ακόμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ταινίες, γυρισμένες από κάμερα 360°. Παρόλο που οι ταινίες αυτές, δεν προσφέρουν την ίδια τρισδιάστατη εμπειρία, όπως τα εργαλεία ΕΠ, όταν τα παρακολουθείς μέσω γυαλιών ΕΠ εξακολουθούν να είναι εκπληκτικά διαδραστικά και εμπυθιστικά.

Οι παρατήσεις που παρατίθενται πιο κάτω, έγιναν λαμβάνοντας υπόψη ένα μάθημα διάρκειας 50 λεπτών, στο οποίο συμμετείχαν 30 μαθητές. Το πλάνο μαθήματος/ έργο διδασκαλίας, αντικατοπτρίζει προς τα που θα προσανατολίζεται η διδακτική δραστηριότητα, έτσι ώστε να επιτευχθούν οι στόχοι που έχουν τεθεί. Το μάθημα διεξάγεται σε μια συγκεκριμένη δομή, βασισμένη σε μια σειρά σταδίων. Η δομή αυτή δεν είναι υποχρεωτική ούτε αυστηρή. Ο τύπος του μαθήματος πρέπει να καθορίζεται σύμφωνα με το γενικό στόχο του μαθήματος. Οι κύριοι τύποι μαθημάτων είναι οι εξής:

**Το μικτό/συνδυασμένο μάθημα** – αποσκοπεί στο να πετύχει ίδια - κατά προσέγγιση - έκταση ορισμένων διδακτικών εργασιών (επικοινωνία, συστηματοποίηση, επαλήθευση). Αυτά είναι και τα πιο συνηθισμένα είδη μαθημάτων που συναντάμε στη διδακτική πρακτική, ειδικά στο γενικό σχολικό επίπεδο.

**The lesson of communication/appropriation of new knowledge** – έχει ως θεμελιώδη στόχο, την απόκτηση νέας γνώσης αναπτύσσοντας παράλληλα πνευματικές ικανότητες και νοοτροπίες. Συνεπώς, εκτός της απόκτησης της νέας γνώσης, τα υπόλοιπα στάδια που αντιστοιχούν στο μικτό τύπο (διαφορετικά από την επικοινωνία/χρήση της νέας γνώσης) είναι παρόντα και σε αυτό τον τύπο μαθήματος, με σαφώς λιγότερη σημασία όμως. Αυτό εξαρτάται, κυρίως από την ηλικία των μαθητών (στο γυμνάσιο για παράδειγμα, το μάθημα επικοινωνίας τείνει να έχει μια μονοδιάστατη δομή).

**Το μάθημα ανάπτυξης δεξιοτήτων και ικανοτήτων** (ειδικά για τα μαθηματικά) – επιδιώκει να εξοικειώσει τους μαθητές με τις διάφορες μεθόδους διανοητικής εργασίας, να τους βοηθήσει στο να συνηθίσουν στο να εργάζονται ανεξάρτητα καθώς επίσης προσβλέπει στην εφαρμογή της γνώσης στην πράξη.

Οι τρεις τύποι μαθημάτων που έχουν παρουσιασθεί πιο πάνω, σε γενικές γραμμές έχουν την ίδια δομή. Η διαφορά τους έγκειται στη σημασία που δίνουν στα εκάστοτε στάδια τους – παρουσίαση του περιεχομένου έναντι στην εμπέδωση της γνώσης.

*Η δομή και το χρονοδιάγραμμα ενός μικτού/συνδυασμένου μαθήματος:*

	Lesson stages	Duration	VR
1	Organizational moment	3 min	
2	Updating/checking the previously acquired knowledge and skills, checking the homework	10 min	
3	Preparing for the new topic	3 min	
4	Announcement of the new topic and lesson objectives	3 min	
5	Optimal presentation of the content and directing learning by various ways depending on its nature; Training students in solving various tasks, gradually introduced, depending on the level of difficulty, on the psychological components involved in the learning process; differentiated and individualised activities, reported to the psychological particularities regarding age and individual.	15 min	Yes
6	Fixation of knowledge through repetition, systematization of knowledge and skills, through applications involving transfer of skills and abilities in contexts different from those created during the stage of orienting the learning process.	10 min	Yes
7	Ensuring retention and transfer by specifying the homework, accompanied by the explanations needed to continue learning and to ensure the operation with new knowledge and skills in new conditions/contexts	4 min	
8	Appreciations and recommendations	2 min	



Οι εφαρμογές ΕΠ και οι τρισδιάστατες ταινίες μπορούν να είναι πιο ελκυστικές, στην παρουσίαση νέου περιεχομένου για παρατήρηση και διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ της μαθηματικής θεωρίας και της περιβάλλουσας πραγματικότητας. Υπάρχουν (ή θα μπορούσαν να σχεδιαστούν) διαδραστικές εφαρμογές, που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν κατά τη διάρκεια των ασκήσεων και της επίλυσης προβλημάτων, που αποσκοπούν στην εμπέδωση της γνώσης.

Άλλοι τύποι μαθημάτων είναι οι ακόλουθοι:

*Το μάθημα της εμπέδωσης της γνώσης και ανάπτυξης ικανοτήτων και δεξιοτήτων – αποσκοπεί, ειδικότερα, στην εδραίωση της ήδη αποκτηθείσας και της κάλυψης των κενών των μαθητών. Αυτός ο τύπος μαθήματος καθίσταται αποτελεσματικός, εφόσον αλλάξει το περιεχόμενο γύρω από ιδέες που έχουν σχετική γνωστική αξία, έτσι ώστε οι μαθητές μπορούν να κάνουν συνδέσεις που τους επιτρέπουν πιο σύνθετες και λειτουργικές εφαρμογές.*

*Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζονται η γενική δομή και η διάρκεια αυτού του τύπου μαθήματος:*

	Lesson stages	Duration	VR
1	Organizational moment	3 min	
2	Announcement of the topic and objectives by presenting the revision plan, established and communicated to the students in the previous lesson	5 min	
3	Orienting the learning process by directing the revision/consolidation process: systematization, deepening knowledge and/or skills, establishing new correlation between them; transfer in new instructional contexts based on solving various tasks with progressive degrees of difficulty; synthesis, individual or group work; differentiated and individualised activities.	30 min	Yes
4	Ensuring retention and transfer by specifying the homework, accompanied by the explanations needed to continue learning and to ensure the operation with new knowledge and skills in new conditions/contexts	10 min	
5	Appreciations and recommendations	2 min	

## Το μάθημα επαλήθευσης και εκτίμησης των σχολικών αποτελεσμάτων –

στοχεύει κυρίως στο καθορισμό του επιπέδου κατάρτισης των μαθητών, αλλά και στη διαμόρφωση των γνώσεών τους σε νέα πλαίσια αναφοράς με ρόλο στα μελλοντικά μαθησιακά μονοπάτια.

*Η γενική δομή και η διάρκεια αυτού του τύπου μαθήματος έχουν ως εξής::*

	Lesson stages	Duration	VR
1	Organizational moment	3 min	
2	Announcing the assessment objectives/competences to be evaluated – the proposed topic for the evaluation and how the evaluation <u>process</u> will be carried out ; in the case of a large content evaluation, the topic will be established and announced in advance.	5 min	
3	Performance Assessment – This step is correlated with the specifics of the method (generally written, oral or practical evaluation) and the evaluation tools; the students are informed about the scales/and/or the assessment criteria.	30 min	Yes
4	Ensuring the inverse connection by checking the results <u>directly/individually</u> ; highlighting the typical mistakes, accompanied by additional explanations in order to clarify them.	10 min	Yes
5	Appreciations and recommendations	2 min	

Όσον αφορά την αξιολόγηση, οι εφαρμογές ΕΠ μπορούν να σχεδιαστούν έτσι ώστε να περιλαμβάνουν δοκιμές από διαφορετικούς τύπους αντικειμένων (διπλή επιλογή, πολλαπλή επιλογή ή αντιστοίχιση) ή ημι-αντικειμενικών (με σύντομες ή συμπληρωματικές απαντήσεις). Ένα από τα πλεονεκτήματα, είναι το γεγονός ότι ο μαθητής λαμβάνει τη σωστή απάντηση επί τόπου, επιτυγχάνοντας έτσι, άμεσα την αντίστροφη επικοινωνία. Ακόμη ένα πλεονέκτημα, είναι η δυνατότητα διατήρησης/αποθήκευσης των απαντήσεων των μαθητών, και το ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να τις βρουν διαθέσιμες σε μια βάση δεδομένων.

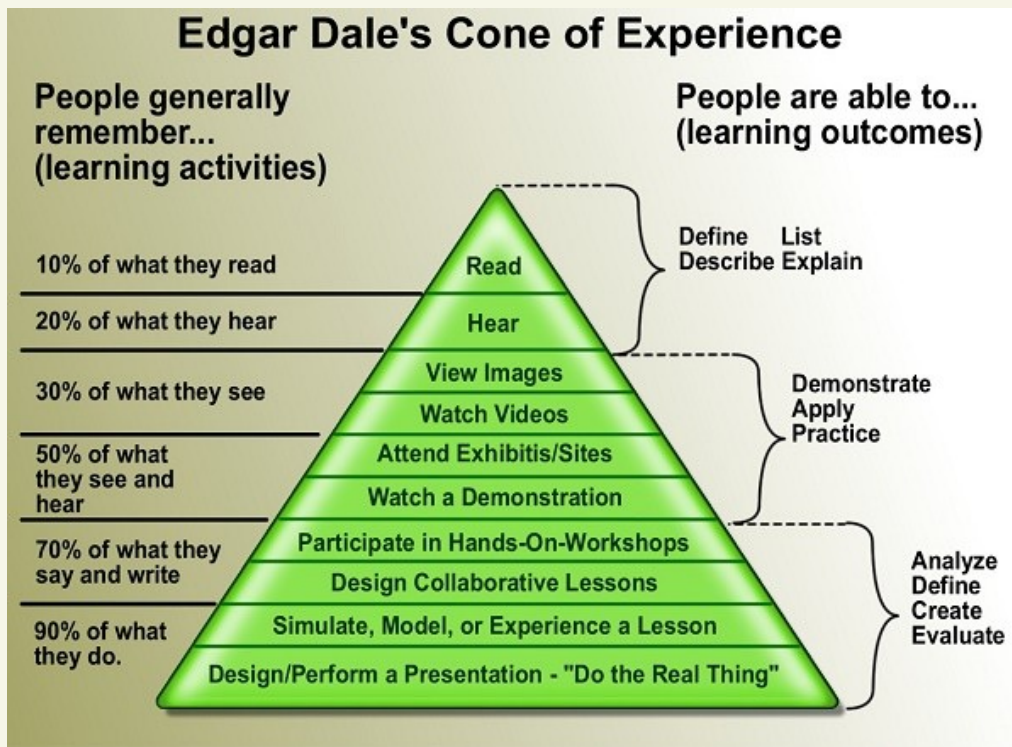
Μερικά από τα μειονεκτήματα των αντικειμενικών/ημι-αντικειμενικών πραγμάτων, είναι ότι δεν επιτρέπουν την αξιολόγηση σύνθετων μαθησιακών στόχων όπως η πρωτοτυπία και η δημιουργικότητα των μαθητών, η ικανότητα τους να οργανώνουν και να ενσωματώνουν τις ιδέες τους, η ερμηνεία και η εφαρμογή των πληροφοριών που έχουν αποκτήσει.

Όπως μπορείτε να δείτε, η υλοποίηση ενός σχεδίου μαθήματος, εξαρτάται από μια σειρά μεταβλητών, όπως η φύση του περιεχομένου, οι επιδιωκόμενοι στόχοι, το επίπεδο κατάρτισης των μαθητών και το επίπεδο των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται.

# ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠ, ΣΤΗΝ ΤΡΕΧΟΥΣΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ ΣΤΙΣ ΧΩΡΕΣ ΤΩΝ ΕΤΑΙΡΩΝ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΕΙΚΟΝΙΚΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Οι έρευνες έχουν δείξει ότι συγκρατούμε στη μνήμη μας μόνο το 10% αυτών που βλέπουμε, και το 90% αυτών που βιώνουμε (Εικόνα 1).



Πηγή: Εικόνα 1 <https://www.td.org/Publications/Blogs/Science-of-Learning-blog/2015/03/Debunk-This-People-Remember-10-Percent-of-What-They-Read>

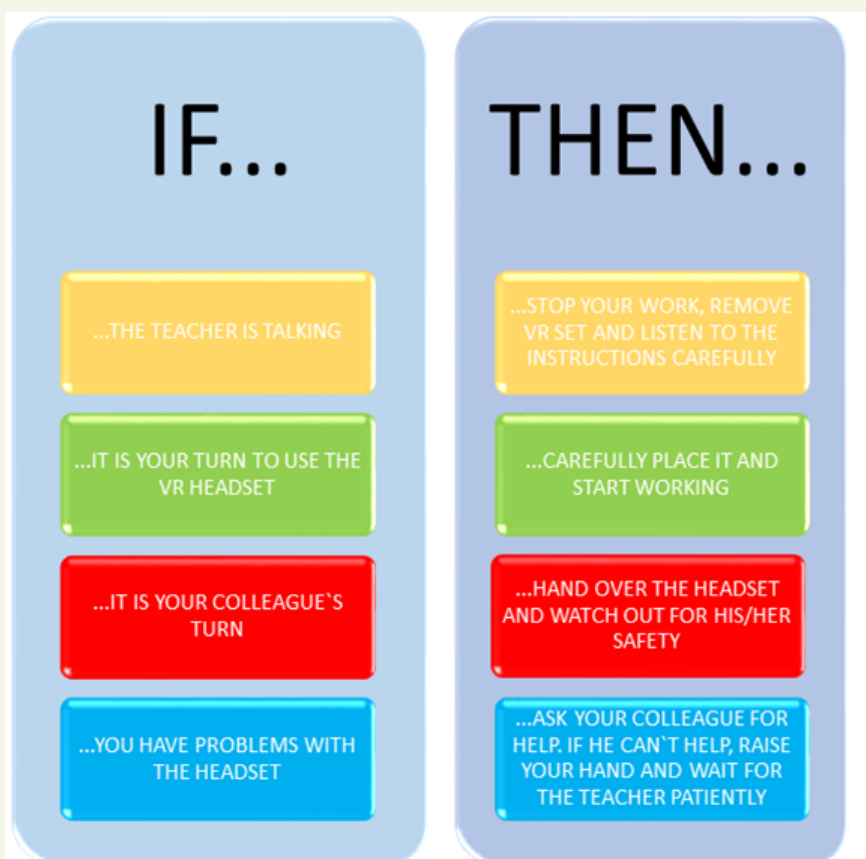
Η τεχνολογία ποτέ δε θα υποκαταστήσει τον εκπαιδευτικό. Μπορεί όμως να βοηθήσει στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων και ικανοτήτων, που απαιτούνται για τη ζωή στον 21ο αιώνα – επικοινωνία, δημιουργικότητα, συνεργασία και κριτική σκέψη.

Η ΕΠ στη μάθηση μετασχηματίζει τα βαρετά στοιχεία, κάνοντας τα πιο ενδιαφέροντα. Έτσι, ακόμη και οι λιγότερο δραστήριοι μαθητές, δείχνουν περισσότερο ενδιαφέρον και αφοσίωση στο μάθημα. Η δημιουργία εκπαιδευτικών σεναρίων, με τη χρήση ΕΠ, παρέχει ένα ελεγχόμενο μαθησιακό περιβάλλον. Επομένως, οι εικονικές εμπειρίες που δημιουργούνται μέσω της ΕΠ επιτρέπουν στους μαθητές να βιώσουν τα σενάρια, χωρίς να εκτίθενται σε συγκεκριμένους κινδύνους. Έτσι, η τεχνολογία ΕΠ επιτρέπει στους καθηγητές να δίδουν την ευκαιρία να μαθαίνουν από την εμπειρία, με ασφάλεια και απολαμβάνοντάς την.

Η ΕΠ, παρέχει στους μαθητές, τη δυνατότητα να μπορούν να κάνουν λάθη και να μαθαίνουν από αυτά, χωρίς συνέπειες. Με αυτό το τρόπο τους δίδεται η ευκαιρία να δοκιμάσουν ξανά για να πετύχουν το σκοπό τους - πρακτική και εδραίωση.

Πριν από την πρώτη χρήση της τεχνολογίας ΕΠ στην τάξη, από τους μαθητές, συστήνεται να αφιερώσετε χρόνο τους, για να συζητήσετε η χρήση της ΕΠ στην τάξη, να τους ζητήσετε να περιγράψουν την εμπειρία τους και να ρωτήσετε για τις προσδοκίες τους. Είναι ευθύνη των εκπαιδευτικών να δημιουργήσουν την κατάλληλη ατμόσφαιρα στην τάξη και να τους στόχους που αναμένουν ότι θα επιτύχουν.

Μετά την πρώτη εμπειρία που θα έχουν οι μαθητές με την ΕΠ, ο εκπαιδευτικό, θα πρέπει να συζητήσει για αυτήν με τους μαθητές. Να τους ρωτήσει τι είδα, να συζητήσουν τα συναισθήματά τους, τις επιπτώσεις και τα αποτελέσματά τους. Η χρήση της εικονικής πραγματικότητας στην τάξη, πιθανότατα θα φέρει χαρά και ενθουσιασμό στους μαθητές. Μπορεί ακόμη να επηρεάσει και την αντίληψη που έχουν οι μαθητές για τη μάθηση. Επομένως, οι εκπαιδευτικοί, πρέπει να καθορίσουν σαφείς κανόνες και να δώσουν λεπτομερείς οδηγίες σχετικά με την εκμάθηση σε ένα εικονικό περιβάλλον. Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τους κανόνες συμπεριφοράς. Οι εκπαιδευτικοί, πρέπει να τονίσουν τη σημασία της καλής επικοινωνίας που πρέπει να έχουν οι μαθητές μεταξύ τους, καθώς και οι μαθητές με τους εκπαιδευτικούς, κατά τη διάρκεια χρήσης της ΕΠ.



Κατά την εισαγωγή του μαθήματος και της εφαρμογής της ΕΠ, ο/η εκπαιδευτικός πρέπει να κατευθύνει το ενδιαφέρον των μαθητών στο ίδιο το περιεχόμενο, έτσι ώστε να μη χάσουν οποιεσδήποτε σημαντικές λεπτομέρειες που θα τους βοηθήσουν στην εκμάθηση. Οι έφηβοι, είναι ιδιαίτερα επιρρεπείς συναισθηματικά με τέτοιες εμπειρίες, και μπορούν να παρασυρθούν, όταν χρησιμοποιούν ΕΠ. Για αυτό το λόγο ο καθηγητής πρέπει να τονίσει τη σημασία των αποτελεσμάτων, τόσο στον πραγματικό, όσο και στον εικονικό κόσμο. Χωρίς υψηλά επίπεδα συγκέντρωσης, οι μαθητές θα μπορούσαν να χάσουν λεπτομέρειες, οι οποίες να είναι σημαντικές για τη εμπειρία εκμάθησης μέσω ΕΠ.

## Κανόνες ασφαλείας για τη χρήση ΕΠ στην τάξη

Για να πετύχουμε τη μέγιστη αποτελεσματικότητα ενός μαθήματος, κατά τη χρήση της νέας αυτής τεχνολογίας, είναι απαραίτητο να καθοριστούν εκ των προτέρων οι μέθοδοι εργασίας και οι κανόνες συμπεριφοράς, εντός και εκτός της τάξης. Πριν από την εφαρμογή της ίδιας της τεχνολογίας, οι μαθητές πρώτα να γνωρίζουν για τις προφυλάξεις που πρέπει να πάρουν για να είναι ασφαλείς. Οι προφυλάξεις αυτές μπορούν να συνοψιστούν ως εξής: Είναι απαραίτητο να εξαλειφθούν όλοι εξωτερικοί παράγοντες που μπορούν να διαταράξουν την τάξη στην οποία η ΕΠ χρησιμοποιείται. Στις πόρτες πρέπει να υπάρχουν σαφείς προειδοποιήσεις, που να εμποδίζουν τους άλλους να έρχονται από έξω για να μην ενοχλήσουν την εργασία. Είναι επίσης σημαντικό, οι μαθητές να εργάζονται χαμηλόφωνα. Επίσης, όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν τον εξοπλισμό ΕΠ, είναι αδύνατο να βλέπουν γύρω τους. Επομένως, οποιοσδήποτε εξωτερικός ήχος πρέπει να ελαχιστοποιείται. Επίσης, οποιαδήποτε φυσικά εμπόδια πρέπει να αφαιρεθούν. Οι κανόνες συμπεριφοράς και επικοινωνίας, κατά τη διάρκεια εργασιών, πρέπει να είναι ξεκάθαρα ορατοί.

- Να ακούτε προσεχτικά τον/ην καθηγητή/τρια.
- Απομακρύνετε από τον περίγυρο, όλα τα φυσικά εμπόδια, πριν από τη χρήση ΕΠ.
- Πάντα να εργάζεστε σε ζευγάρια. Ποτέ μόνοι.
- Να διατηρείτε τη συσκευή καθαρή.

## Αναφορά και Αξιολόγηση: Πως θα μπορούσε ο εκπαιδευτικός, να συζητήσει με τους μαθητές, για αυτή την καινοτόμο εκπαιδευτική διαδικασία

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν διαφορετικούς τύπους και μεθόδους αξιολόγησης για να ελέγξουν εάν έχουν επιτευχθεί, τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα ενός μαθήματος. Πιο κάτω, παρουσιάζονται ορισμένα πρότυπα μεθόδων αξιολόγησης, τα οποία, μπορούν να χρησιμοποιηθούν;

### 1. ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

- Ανάλυση πορτοφόλιο
- Παρατήρηση της απόδοσης των μαθητών σε δραστηριότητες, πρακτικές εργασίες και έρευνα.
- Προφορική εξέταση
- Ανάλυση των αναφορών των μαθητών, καθώς και των αφισών τους, «χαρτών εγκεφάλου» και έρευνας.
- Γραπτή εξέταση



## 2. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Αξιολόγηση των προτάσεων σε κλίμακα από το 1 μέχρι το 5, με το 1 να αντιστοιχεί με δε «συμφωνώ καθόλου», και το 5 «συμφωνώ απολύτως».

1. I like the way of work in this lesson.	1	2	3	4	5
2. This lesson was interesting.	1	2	3	4	5
3. It is clear what I was supposed to learn in this lesson.	1	2	3	4	5
4. The subject matter was clearly explained.	1	2	3	4	5
5. I have learned the subject matter.	1	2	3	4	5
6. I think I actively participated in this lesson.	1	2	3	4	5
7. I was more active in this lesson than usually.	1	2	3	4	5
8. By being active I contributed to the quality of the lesson.	1	2	3	4	5
9. I was motivated for work in this lesson.	1	2	3	4	5
10. I prefer using VR in lessons.	1	2	3	4	5
11. Name two things you liked in this lesson.					
12. Name two things you didn't like in this lesson.					

## 3. ΑΞΙΟΛΟΓΗ ΟΜΑΔΙΚΗΣ-ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ELEMENTS	YES	PARTLY	NO
1. We have completed the task successfully.			
2. Each member of the team has contributed to the fullest.			
3. All members of the team have participated in completing the task.			
4. We have accepted each other's opinions.			
5. I like this way of learning.			
6. I can explain what I have learned after this lesson.			

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Buldioski, C., Grimaldi, C., Mitter, S., Titley, G., & Wagner, G. (2002). Training Essentials. T-Kits (Vol. 6). Strasbourg: Council of Europe Publishing. Retrieved from [http://youth-partnership-eu.coe.int/youth-partnership/documents/Publications/T\\_kits/6/tkit6.pdf](http://youth-partnership-eu.coe.int/youth-partnership/documents/Publications/T_kits/6/tkit6.pdf)
- Carver, Rebecca L. (1996). Theory for practice: A framework for thinking about experiential education. *The Journal of Experiential Education*, 19:8-13.
- Carver, Rebecca L. (1998). Experiential education for youth development. *Youth Development Focus*, 4-H Center for Youth Development, University of California, Davis, fall.
- Catterall J., Chapleau R., and Iwanaga J. (1999). Involvement in the arts and human development: General involvement and intensive involvement in music and theatre arts. In E. B. Fiske (ed.) *Champions of Change* (pp. 1-18). Washington, DC: Arts Education Partnership.
- Chisholm, L. (2001). Towards a revitalisation of non-formal learning for a changing Europe. Report of the Council of Europe Youth Directorate Symposium on Non-Formal Education. Strasbourg, 13 - 15 October 2000.
- Dewey, John. (1916). "Democracy and education: an introduction to the philosophy of education." New York: The Macmillan Company.
- Enfield, Richard. (2001). Connections between 4-H and John Dewey's philosophy of education. *Youth Development Focus*, 4-H Center for Youth Development, University of California, Davis, winter.
- Enfield, Richard. (2000). SLO Scientists: Families having fun with Science Clubs. In Braverman, Marc T., Ramona M. Carlos, and Sally M. Stanley, Eds. *Advances in Youth Development Programming: Reviews and Case Studies from the University of California*. Oakland, CA: University of California Agriculture and Natural Resources.
- Gillert, A., Haji-Kella, M., Jesus Cascao Guedes, M. de, Raykova, A., Schachinger, C., & Taylor, M. (2000). *Intercultural Learning. T-Kits (Vol. 4)*. Strasbourg: Council of Europe Publishing. Retrieved from [http://youth-partnership-eu.coe.int/youthpartnership/documents/Publications/T\\_kit5/4/tkit4.pdf](http://youth-partnership-eu.coe.int/youthpartnership/documents/Publications/T_kit5/4/tkit4.pdf)
- Johnson C. M. and Memmott J. E. (2006). Examination of relationships between participation in school music programs of differing quality and standardized test results. *Journal of Research in Music Education*, 54, pp. 293-307.
- Russell, Stephen T., and Glen H. Elder, Jr. (1997). "Academic Success in Rural America: Family Background and Community Integration." *Childhood*, 4:169-181.
- Van Horn, Beth E., Constance A. Flanagan, and Joan S. Thomson. (1998). The First Fifty Years of the 4-H Program (Part 1). *Journal of Extension*, 36(3): <http://www.joe.org/joe/1998december/comm2.html>.
- Siurala, Lasse (2008): The variety and differences amongst the concepts of nonformal education. Vilnius, 16.04.2008.
- Walker, Joyce. (1998). "Youth Development Education: Supports and Opportunities for Young People." The Center. University of Minnesota Center for 4-H Youth Development. Winter:10-13.
- Bell, J. T., & Fogler, S. H. (1995). The investigation and application of virtual reality as an educational tool. *Proceedings of the American Society for Engineering Education Annual Conference*. Anaheim, CA;
- Breuer, J. (2011). *Spielend lernen? Eine Bestandsaufnahme zum (Digital) Game-Based Learning*. Landesanstalt für Medien NRW;
- Clements, D. H., & McMillen, S. (1996). Rethinking Concrete Manipulatives. *Teaching Children Mathematics*, 2(5), pp. 77 and 270-279;
- Dorward, J., & Heal, R. (1999). National Library of Virtual Manipulatives for Elementary and Middle Level Mathematics. *Proceedings of WebNet99 World Conference on the WWW and Internet*, pp. 1510-1512. Honolulu, Hawaii Association for the Advancement of Computing in Education;
- Driscoll, Mark J. (1983). *Research within Reach: Elementary School Mathematics and Reading*. St. Louis: CEMREL;
- Durlach, N., Allen, G., Darken, R., Garnett, R. L., Loomis, J., Templeman, J., & von Wiegand, T. E. (2000). Virtual environments and the enhancement of spatial behavior: Towards a comprehensive research agenda. *Presence - Teleoperators and Virtual Environments*, 9(6), 593-615;
- Fennema, E. H. (1972). Models and mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 19, 635-640. Retrieved 28 March, 2019, from <https://www.jstor.org/stable/41188128>
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning placevalue with understanding in first grade. *Journal for research in Mathematics Education*, 23, 98-122. Retrieved March 28, 2019 from <https://www.jstor.org/stable/749496> ;
- Lesh, R. A. (1979). *Applied ProblemSolving in Early Mathematics Learning*. Northwestern University;
- Moyer, P. S., Bolyard, J.J., & Spikell, M.A. (2002). What are virtualmanipulatives? *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 372-377. Retrieved 21March, 2019, from <https://www.jstor.org/stable/41197834>;
- NCTM, National Council of Teachers ofMathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for schoolmathematics*. Reston, VA, p. 17;
- Post, T. (1981). The Role of Manipulative Materials in the Learning of MathematicalConcepts. In *Selected Issues in Mathematics Education*. Berkeley, CA:National Society for the Study of Education and National Council of Teachers ofMathematics, McCutchan Publishing Corporation;
- Rizzo, A. A., Buckwalter, J. G., Neumann, U., Kesselman, C., Thiebaut, M., Larson, P., & Van Rooyen, A. (1998). The virtual reality mental rotation spatial skills project. *CyberPsychology andBehavior*, 1(2), 113-120;
- Sourin, A., Lei, W., (2009). Visual immersive haptic mathematics. *Virtual Reality* (2009) 13, pp. 221-234;
- Sowell, Evelyn J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20:498-505. Retrieved March 25, 2019, from <https://www.jstor.org/stable/749423>;
- Suydam, M. N. (1986). Research Report: Manipulative Materials and Achievement. *ArithmeticTeacher*, 33, pp 10, 32. Retrieved 25 March, 2019, from <https://www.jstor.org/stable/41192833> ;
- Suydam, M. N., & Higgins, J. L. (1976). Review and Synthesis of Studies of Activity-Based Approaches to Mathematics Teaching. Final Report. NIEContract No. 400-75-0063;
- Taxén, G., Naeve, A. (2001). *CyberMath: ASystem for Exploring Open Issues inVR-based Education*, Center for User Oriented ITDesign, Royal Institute of Technology, Stockholm; Winn, W., & Bricken, W. (1992). Designing virtual worlds for use inmathematics education: The example of experiential algebra. *EducationalTechnology*, 32(12), 12-19. Retrieved 22 March, 2019, from <https://www.jstor.org/stable/44425562>
- <https://www.weareteachers.com/virtual-reality-classroom/>[https://www.researchgate.net/publication/325248053\\_Learning\\_in\\_a\\_virtual\\_environment\\_implementation\\_and\\_evaluation\\_of\\_a\\_VR\\_math-game](https://www.researchgate.net/publication/325248053_Learning_in_a_virtual_environment_implementation_and_evaluation_of_a_VR_math-game)[http://www.isj-db.ro/static/files/curriculum/Informatica\\_TIC/Anexa\\_2\\_Tipuri\\_de\\_lecii\\_FINAL.docx](http://www.isj-db.ro/static/files/curriculum/Informatica_TIC/Anexa_2_Tipuri_de_lecii_FINAL.docx)[http://www.isjcs.ro/Definitivat/GHID\\_DEF\\_pentru%20site.pdf](http://www.isjcs.ro/Definitivat/GHID_DEF_pentru%20site.pdf)
- [http://dppd.ulbsibiu.ro/ro/cadre\\_didactice/adriana\\_nicu/cursuri/Pedagogie%20curs\\_8\\_Testul%20docimologic.pdf](http://dppd.ulbsibiu.ro/ro/cadre_didactice/adriana_nicu/cursuri/Pedagogie%20curs_8_Testul%20docimologic.pdf)Sources of sub section 4.3[www.cfeduex.com](http://www.cfeduex.com)
- <https://www.virtualiteach.com/single-post/2018/06/04/Maths-in-VR><https://nearpod.com/blog/virtual-reality-math/>
- <http://blog.scientix.eu/2018/05/the-use-of-immersive-virtual-reality-in-the-mathematics-classroom/>
- <https://www.veative.com/deployment/classroom-usage> <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1131313.pdf><https://www.cfeduex.com/setting-a-conducive-atmosphere-in-class-through-vr-learning-etiquette/>
- <https://www.cfeduex.com/emphasizing-the-benefits-of-virtual-reality-in-universities-and-its-students/>
- <https://observatory.tec.mx/edu-trends-augmented-and-virtual-reality/>
- <https://www.pinterest.com/https://loomen.carnet.hr/>
- <https://www.google.com/search?q=confucius+quotes+i+hear+i+forget&tbm=isch&source=univ&client=firefox-b-d&sa=X&ved=2ahUKEWi6g6vhiZbiAhUqtIsKHfQgD64QsAR6BAGJEA&biw=1366&bih=645#imgrc=m18cStENO6xstM>



# Erasmus+

Το έργο Math Reality έχει την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η παραγωγή της παρούσας έκδοσης δεν συνιστά αποδοχή του περιεχομένου, το οποίο αντικατοπτρίζει αποκλειστικά τις απόψεις των συντακτών, και η Επιτροπή δεν μπορεί να αναλάβει την ευθύνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Κωδικός έργου: 2018-1-FR01-KA201-048197



**Math  
Reality**