

Ο Κανόνας των Συνημιτόνων

Ενότητα: Τριγωνομετρία

Θέμα: Απεικόνιση με το «κόψιμο» του κανόνα των Συνημιτόνων

Δεξιότητες: Η οπτικοποίηση της τριγωνομετρικής θεωρίας. Η αναπαράστασή της μέσω της διαχείρισης σχημάτων.

Υλικά: Χαρτόνια, τριγωνικοί χάρακες, μολύβι, χρωματιστά στυλό, ψαλίδια.

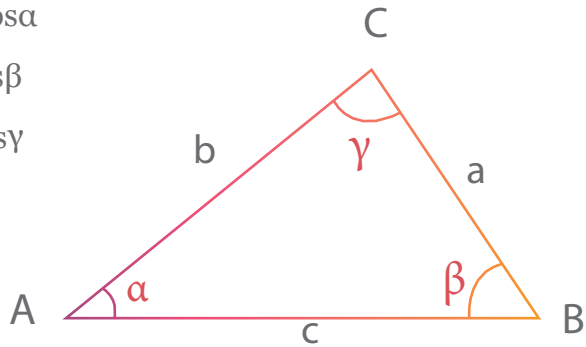
Επίπεδο: Ηλικίες 17/18

Ο Κανόνας των Συνημιτόνων

(λέγεται επίσης νόμος των συνημιτόνων) συσχετίζει τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου με το συνημίτονο οποιασδήποτε γωνίας του.

Ακολουθώντας τη σημειογραφία στην εικόνα, ο Κανόνας των Συνημιτόνων μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$



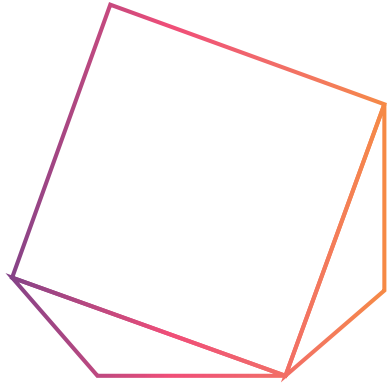
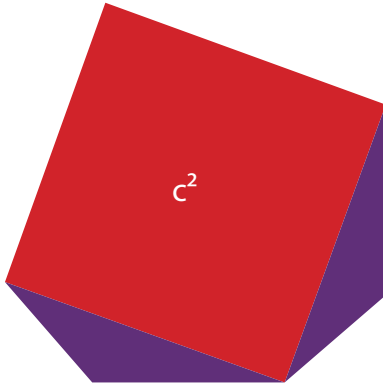
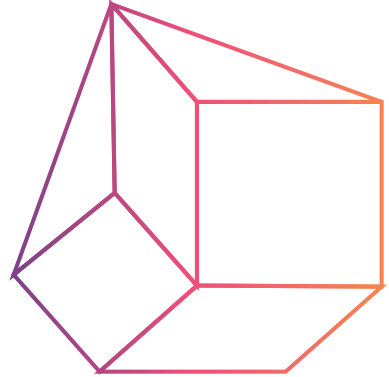
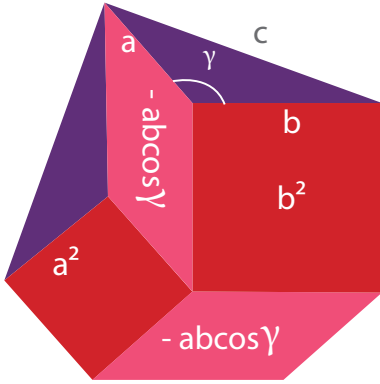
Ο κανόνας ήταν γνωστός ήδη από τον 3ο αιώνα π.Χ., καθώς τα Στοιχεία του Ευκλείδη περιλαμβάνουν μια αντίστοιχη εκδοχή του θεωρήματος, ωστόσο η ιδέα των συνημιτόνων δεν είχε πάρει ακόμα μορφή. Ο Ευκλείδης διαχώριζε τις περιπτώσεις των αμβλειών γωνιών και των οξειών γωνιών (που αντιστοιχούν στις δυο περιπτώσεις αρνητικών και θετικών συνημιτόνων).

Τον 15ο αιώνα, ο Άλ-Κασί, ένας Πέρσης μαθηματικός και αστρονόμος, εισήγαγε το πρώτο

ξεκάθαρο θεώρημα του νόμου των συνημιτόνων, κατάλληλο για σύγχρονη χρήση. Για αυτό τον λόγο, από τη δεκαετία του '90, στη Γαλλία ο νόμος των συνημιτόνων αποκαλείται ακόμα Θεώρημα του Άλ-Κασί.

Στην Ιταλία, ο νόμος των συνημιτόνων αναφέρεται ως Θεώρημα Καρνότ και χρησιμεύει, μαζί με τον νόμο των ημιτόνων, στην επίλυση οποιοδήποτε τριγώνου.

1 |



1) Σχεδιάστε ένα τρίγωνο: το μοβ στην εικόνα με πλευρές a , b , c και μια αμβλεία γωνία γ .

2) Με τους τριγωνικούς χάρακες σχεδιάστε ολόκληρο το πρώτο σχήμα:

- σχεδιάστε το μεγάλο κόκκινο τετράγωνο με πλευρές b ,
- σχεδιάστε το ροζ παραλληλόγραμμο προσθέτοντάς τις 2 παράλληλες πλευρές που λείπουν,
- σχεδιάστε το μικρό κόκκινο τετράγωνο με πλευρά a ,
- σχεδιάστε το δεύτερο μοβ τρίγωνο προσθέτοντας την τρίτη πλευρά που λείπει,
- σχεδιάστε το ροζ παραλληλόγραμμο που βρίσκετε στο κάτω μέρος του σχήματος, προσθέτοντας τις 2 παράλληλες πλευρές που λείπουν.

3) Βρείτε το εμβαδόν του ροζ κομματιού του σχήματος χρησιμοποιώντας βασική τριγωνομετρία: το ροζ σχήμα είναι ένα παραλληλόγραμμο, του οποίου η βάση είναι το b . Το ύψος αυτού του παραλληλόγραμμου είναι $-a \cdot \cos \gamma$. Το εμβαδόν είναι η βάση επί ύψος, και αντιστοιχεί με $-abc \cos \gamma$.

4) Με τους τριγωνικούς χάρακες, σχεδιάστε ολόκληρο το δεύτερο σχήμα:

- σχεδιάστε το μεγάλο κόκκινο τετράγωνο με πλευρά c ,
- προσθέστε δυο μοβ τρίγωνα όπως φαίνεται στην εικόνα.

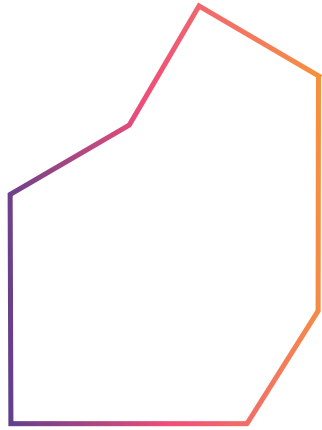
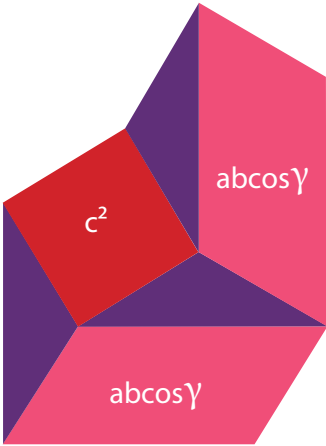
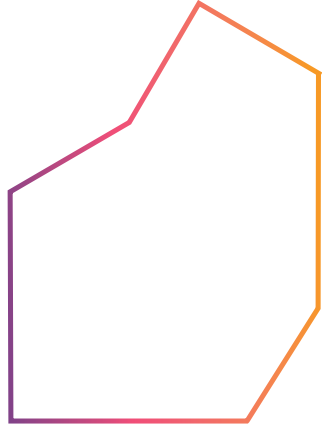
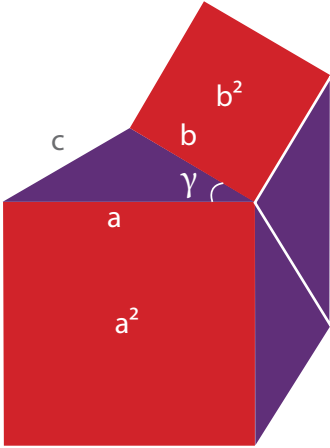
5) Κόψτε τα 2 σχήματα και επαληθεύστε την αναλογία των εμβαδών τους. Όπως μπορείτε να διακρίνετε, τα 2 σχήματα έχουν την ίδια μορφή και ως εκ τούτου, το ίδιο εμβαδόν. Αυτό σημαίνει ότι:

$$a^2 + b^2 - 2abc \cos \gamma + 2 \text{ μοβ τρίγωνα (εμβαδόν του αριστερού σχήματος)} = c^2 + 2 \text{ μοβ τρίγωνα (εμβαδόν του δεξιού σχήματος)}$$

Αφαιρώντας από τα δύο αυτά μέρη τα 2 μοβ τρίγωνα, αποδεικνύεται ο κανόνας των συνημιτόνων.



2 |



Η ίδια διαδικασία αλλά με τρίγωνο οξείας γωνίας.

- 1) Σχεδιάστε ένα τρίγωνο: το μοβ της εικόνας με πλευρές a , b , c και οξεία γωνία γ .
- 2) Με τους τριγωνικούς χάρακες, σχεδιάστε ολόκληρο το σχήμα:
 - σχεδιάστε το μεγάλο κόκκινο τετράγωνο με πλευρά a ,
 - σχεδιάστε το μικρό κόκκινο τετράγωνο με πλευρά b ,
 - ολοκληρώστε το σχήμα στα δεξιά σχεδιάζοντας ένα παραλληλόγραμμο και χωρίστε το σε δύο μοβ τρίγωνα.
- 3) Με τους τριγωνικούς χάρακες, σχεδιάστε ολόκληρο το δεύτερο σχήμα:
 - σχεδιάστε το μικρό κόκκινο τετράγωνο με πλευρά c ,
 - προσθέστε τρία μοβ τρίγωνα όπως φαίνεται στην εικόνα,
 - ολοκληρώστε το σχήμα, προσθέτοντας δυο ροζ παραλληλόγραμμο όπως φαίνετε στην εικόνα.
- 4) Βρείτε το εμβαδόν του ροζ σημείου του σχήματος χρησιμοποιώντας βασική τριγωνομετρία: Το ωχρό ροζ σχήμα είναι παραλληλόγραμμο, του οποίου η βάση είναι a . Το ύψος αυτού του παραλληλόγραμμου είναι $b \cdot \cos \gamma$. Το εμβαδόν είναι η βάση επί ύψος και αντιστοιχεί σε $abc \cos \gamma$.
- 5) Κόψτε τα δύο σχήματα και επαληθεύστε την αντιστοιχία των εμβαδών τους
Αυτό σημαίνει ότι:
 $a^2 + b^2 + 3$ μοβ τρίγωνα (το εμβαδόν του αριστερού σχήματος)
 $= c^2 + 2abc \cos \gamma + 3$ μοβ τρίγωνα (το εμβαδόν του δεξιού σχήματος)
Αφαιρώντας από τα δύο αυτά μέρη τα 3 μοβ τρίγωνα και μετακινώντας το $2abc \cos \gamma$ από τα δεξιά στα αριστερά, αποδεικνύεται ο κανόνας των συνημιτόνων.