08

Η Ανισότητα Αριθμητικού - Γεωμετρικού Μέσου

Ενότητα: Αριθμητική
Θέμα: Αναπαράσταση της ανισότητας μεταξύ αριθμητικών και γεωμετρικών μέσων.
Δεξιότητες: Η δημιουργία γεωμετρικών σχημάτων ακολουθώντας οδηγίες.
Υλικά: μιλιμετρέ χαρτί, ψαλίδια, χάρακας
Επίπεδο: Ηλικία 14/15

Η Ανισότητα Αριθμητικού - Γεωμετρικού Μέσου

Για τη γεωμετρική αναπαράσταση της ανισότητας AM–ΓM, σκεφτείτε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές μήκους x και y, επομένως η περίμετρος του είναι $2x + 2y$ και το εμβαδόν του είναι xy. Παρομοίως, ένα τετράγωνο με όλες τις πλευρές μήκους $\sqrt{xy}$ έχει περίμετρο $4\sqrt{xy}$ και ίσο εμβαδόν με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Η απλούστερη, μη τετριμμένη υπόθεση της ανισότητας AM-ΓM συνεπάγει ότι για τις περιμέτρους ισχύει το $2x + 2y \geq 4\sqrt{xy}$ *και ότι μόνο το τετράγωνο έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα του ίδιου εμβαδού.*

Σύμφωνα με την ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου, ο αριθμητικός μέσος ενός συνόλου μη αρνητικών, πραγματικών αριθμών είναι μεγαλύτερος από τον γεωμετρικό μέσο του ίδιου συνόλου.

Μια σημαντική, πρακτική εφαρμογή στα οικονομικά μαθηματικά γίνεται στον υπολογισμό του συντελεστή απόδοσης: η ετήσια απόδοση, υπολογισμένη με τον γεωμετρικό μέσο, είναι μικρότερη από τον ετήσιο μέσο όρο απόδοσης υπολογισμένο με αριθμητικό μέσο (ή ίση εάν όλες οι αποδόσεις είναι ισάξιες). Αυτό είναι σημαντικό στην ανάλυση επενδύσεων, καθώς ο μέσος όρος

Ο αριθμετικός μέσος ενός συνόλου n αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι το άθροισμα:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Ο γεωμετρικός μέσος ορίζεται ως η νιοστή ρίζα του αποτελέσματος n μη αρνητικών αριθμών. Για ένα σύνολο n μη αρνητικών αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ο γεωμετρικός μέσος εκφράζεται ως:

$$\sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$

Για ένα σύνολο n μη αρνητικών αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_n$, χρησιμοποιώντας αριθμητικές παραστάσεις, η ανισότητα ΑΜ -ΓΜ αποδίδεται ως:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$

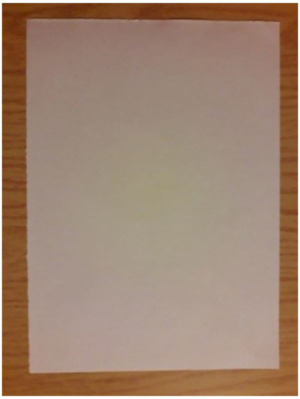
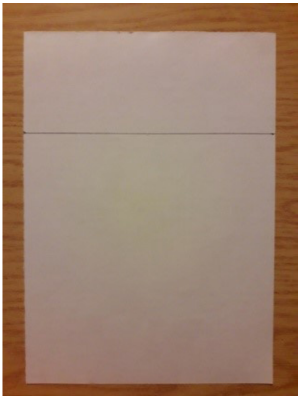
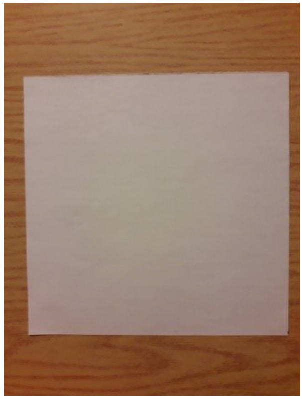
και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Στην περίπτωση δυο μη αρνητικών αριθμών a και b, ισχύει η συνάρτησή

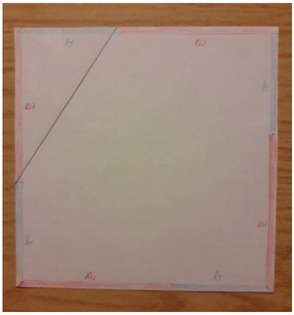
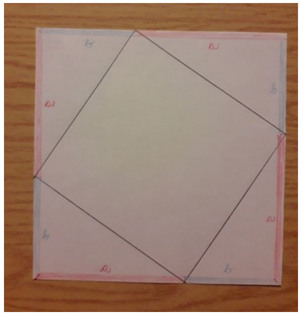
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

με ισότητα αν και μόνο αν a = b .

Η ανισότητα ΑΜ - ΓΜ αποτελεί μια βασική ανισότητα που χρησιμοποιείται για να αποδείξει άλλες ανισότητες. Παρακάτω δίνεται η οπτική παρουσίαση.

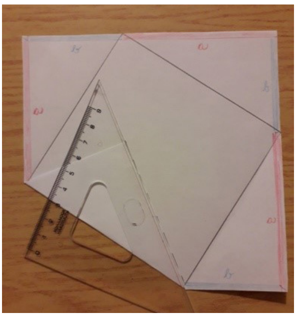
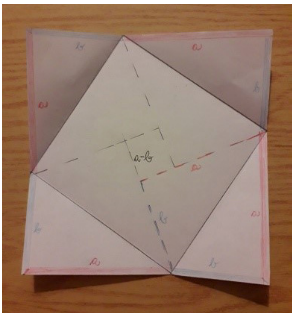
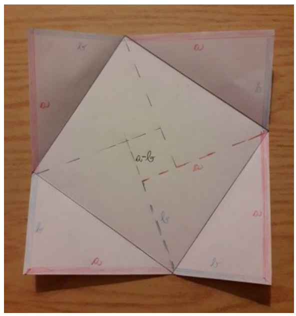




1- Φτιάξτε ένα τετράγωνο με ένα φύλλο χαρτί

2- Χωρίστε την κάθε πλευρά σε δύο τμήματα με μήκος a και b.

3- Τραβήξτε μια γραμμή από το ένα σημείο εώς το άλλο, όπως φαίνεται στις φωτογραφίες.

4 - Διπλώστε το φύλλο χαρτί κατά μήκος των τμημάτων που προέκυψαν.

5- Σχεδιάστε μια διακεκομμένη γραμμή κατά μήκος της μακρύτερης πλευράς (του a μήκους στην απεικόνιση).

6 - Το εμβαδόν του τετραγώνου a + b, που είναι $(a + b)^2$, είναι 8 φορές μεγαλύτερο από αυτό του δεξιού τριγώνου με κάθετο a και b, το οποίο είναι $8 \times ab/2$ βρίσκουμε την ισότητα μόνο αν $a = b$.