

La loi du cosinus

Notion : Trigonométrie

Thème : Manipuler la loi du cosinus en découpant

Compétences : Montrer la loi du cosinus en manipulant des figures

Matériel : Feuilles cartonnées, équerre, stylo, crayons de couleurs, ciseaux

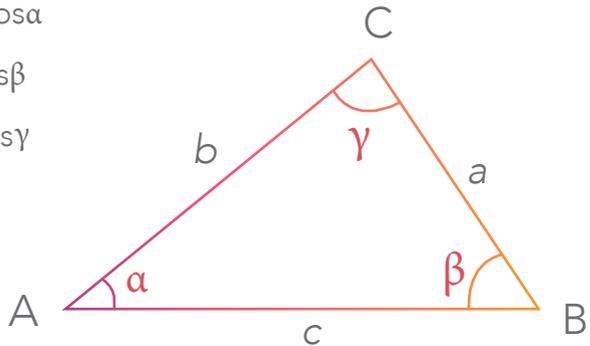
Niveau : Lycée

La loi du cosinus

(aussi appelé théorème du cosinus) rapporte les longueurs des côtés d'un triangle au cosinus de l'un de ses angles.

En suivant la notation de la figure, le théorème du cosinus peut être exprimée :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$



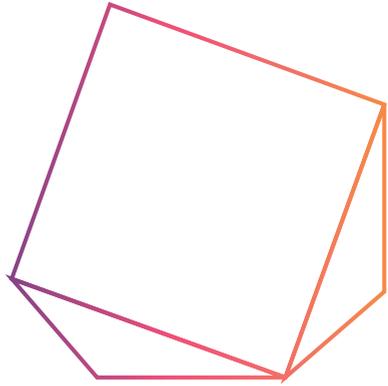
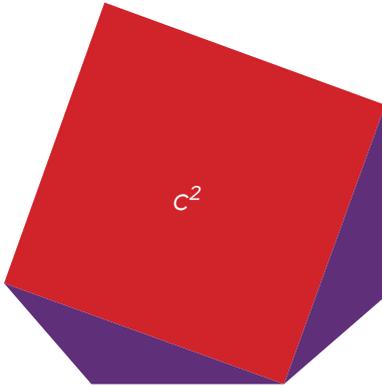
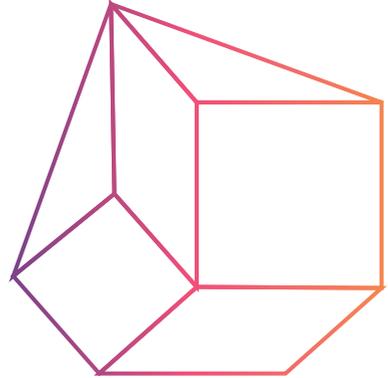
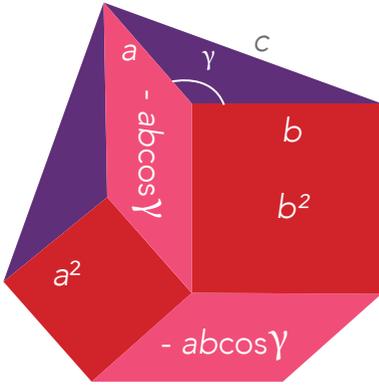
Cette loi est connue depuis le 3ème siècle avant notre ère. En effet, *Les Eléments* d'Euclide contiennent une version équivalente de cette formulation, cependant la notion de cosinus n'était pas encore développée à cette époque.

Euclide traite séparément le cas des triangles obtus et des triangles aigus (correspondant aux deux cas de cosinus négatif ou positif).

Au 15ème siècle, Jamshīdal-Kāshī, un mathématicien et astronome persan, fournit la première formulation explicite de la loi du cosinus sous une forme appropriée pour un usage moderne. C'est pourquoi, depuis les années 1990, en France la loi du cosinus est toujours appelé le Théorème d'Al-Kāshī.

En Italie, la loi des cosinus est généralement connue sous le nom de Teorema di Carnot, et il est utile, avec la loi des sinus, pour résoudre tout triangle.

1 |



1) Dessinez le triangle violet de la première figure de côtés a , b , c et d'angle obtus γ .

2) Avec une équerre, dessinez la première figure :

- dessinez le grand carré rouge de côté b ;
- dessinez le parallélogramme rose en ajoutant les deux cotés parallèles manquants ;
- dessinez le petit carré rouge de côté a ;
- dessinez le deuxième triangle violet en ajoutant le troisième côté manquant ;
- dessinez le parallélogramme rose inférieur en ajoutant les deux côtés parallèles manquants.

3) Trouvez l'aire de la partie rose de la figure en utilisant la trigonométrie : la figure rose est un parallélogramme, dont la base est b . La hauteur de ce parallélogramme est $-a\cos\gamma$. L'aire est la base multipliée par la hauteur, et elle est égale à $-abc\cos\gamma$.

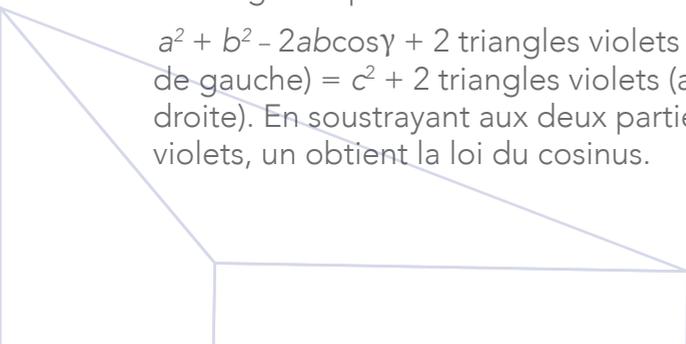
4) Avec une équerre, dessinez la deuxième figure :

- dessinez le grand carré rouge de côté c ;
- ajoutez deux triangles violets comme indiqué sur la figure.

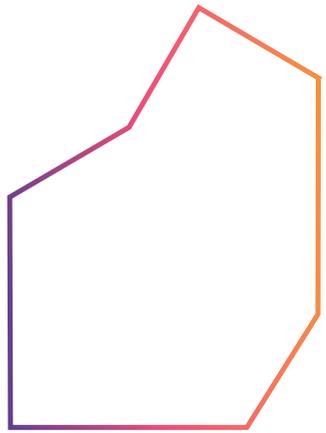
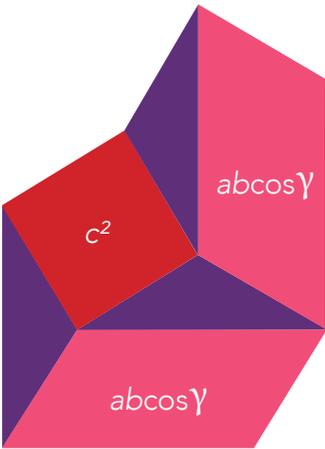
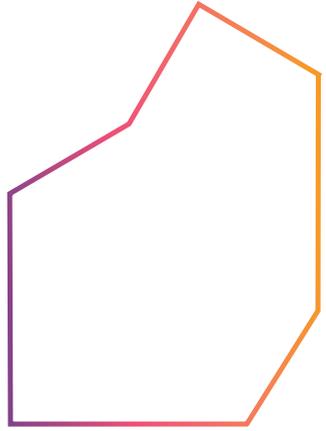
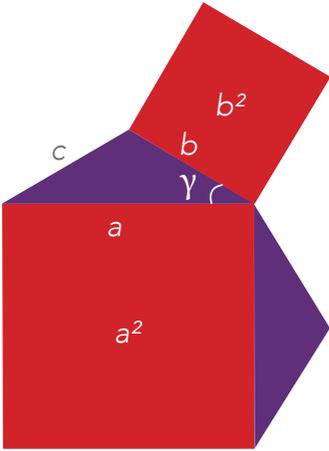
5) Découpez les deux figures et vérifiez l'équivalence de leurs aires. Comme on peut facilement le voir en les superposant, les deux figures ont la même aire.

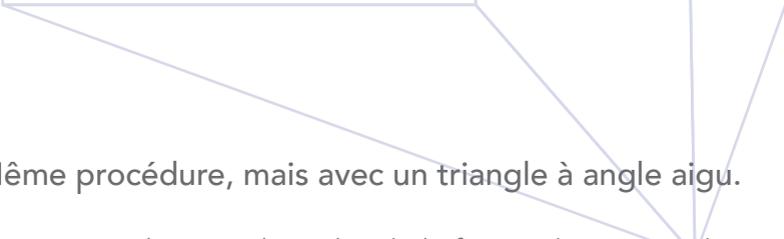
Cela signifie que :

$a^2 + b^2 - 2abc\cos\gamma + 2$ triangles violets (aire de la figure de gauche) = $c^2 + 2$ triangles violets (aire de la figure de droite). En soustrayant aux deux parties les 2 triangles violets, on obtient la loi du cosinus.



2 |





Même procédure, mais avec un triangle à angle aigu.

- 1) Dessinez le triangle violet de la figure de côtés a , b , c et d'angle aigu γ .
- 2) Avec une équerre, dessinez la première figure :
 - dessinez le grand carré rouge de côté a ;
 - dessinez le petit carré rouge de côté b ;
 - complétez la figure en dessinant un parallélogramme et divisez-le en deux triangles violets ;
- 3) Avec une équerre, dessinez la deuxième figure :
 - dessinez le petit carré rouge de côté c ;
 - ajoutez trois triangles violets comme indiqué sur la figure ;
 - complétez la figure en ajoutant deux parallélogrammes roses comme indiqué sur la figure.

4) Trouvez l'aire de la partie rose de la figure en utilisant la trigonométrie de base : la figure rose est un parallélogramme, dont la base est a . La hauteur de ce parallélogramme est $b \cdot \cos \gamma$. L'aire correspond à la base multipliée par la hauteur, et elle est égal à $abc \cos \gamma$.

5) Découpez les deux figures et vérifiez l'équivalence de leur aire.
 $a^2 + b^2 + 3$ triangles violets (aire de la figure de gauche) = $c^2 + 2abc \cos \gamma + 3$ triangles violets (aire de la figure de droite)

En soustrayant aux deux parties les 3 triangles violets, et en déplaçant $2abc \cos \gamma$ de droite à gauche, on obtient la loi du cosinus.