08

L'inégalité de l'arithmétique et la moyenne géométrique

Notion : Arithmétique
Thème : Illustration de l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique.
Compétences : Construire des figures géométriques en suivant des instructions.
Matériel : papier millimétré, ciseaux, règle
Niveau : Lycée

L'inégalité de l'arithmétique et la moyenne géométrique

Pour une interprétation géométrique de l'inégalité de l'arithmétique et la moyenne géométrique, ou plus brièvement l'inégalité AM - GM, considérons un rectangle de côtés x et y, dont le périmètre est $2x + 2y$ et d'aire xy. De même, le périmètre d'un carré de côtés $\sqrt{xy}$ est $4\sqrt{xy}$ et la même aire que le rectangle. Le cas le plus simple et non trivial de l'inégalité AM – GM implique pour les périmètres que $2x + 2y \geq 4\sqrt{xy}$, si et seulement si le carré a le plus petit périmètre parmi tous rectangles possibles de même aire.

L'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique indique que la moyenne arithmétique d'une liste de nombres réels non négatifs est supérieur ou égal à la moyenne géométrique de la même liste.

Une application importante en mathématiques financières consiste à calculer le taux de rendement : le rendement annualisé, calculé par la moyenne géométrique, est inférieur au rendement annuel moyen, calculé par la moyenne arithmétique (ou égal si tous les retours sont égaux). Ceci est important dans l'analyse des investissements, car le rendement moyen surestime l'effet cumulatif.

La moyenne arithmétique d'une liste de *n* nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est la somme de nombres divisés par *n* :

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

La moyenne géométrique est définie comme la n-ième racine du produit de n nombres non négatifs. Pour un ensemble de *n* nombres non négatifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la moyenne géométrique est définie comme telle :

$$\sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$

Pour une liste de n nombres non négatifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'inégalité AM - GM s'écrit :

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$

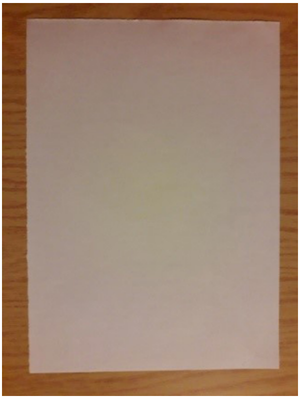
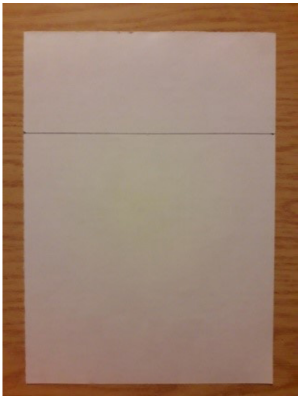
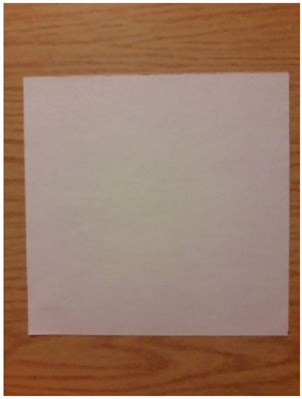
et cette égalité est valable si et seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Pour le cas pour deux nombres non-négatifs *a* et *b*, c'est la formule suivante :

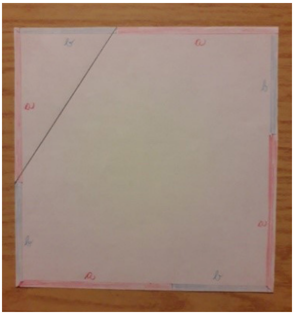
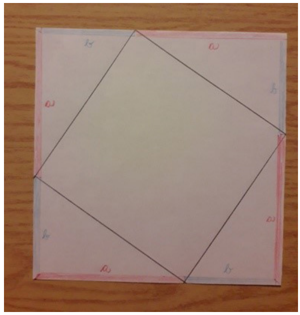
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

avec égalité si et seulement si $a = b$.

L'inégalité AM – GM est une inégalité fondamentale, utilisée pour démontrer d'autres inégalités. Page suivante, vous avez une démonstration visuelle.

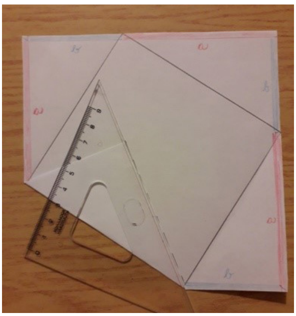
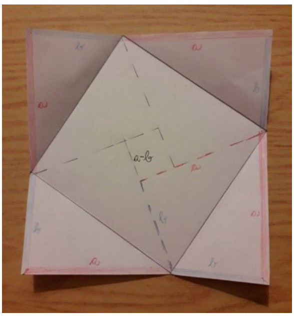
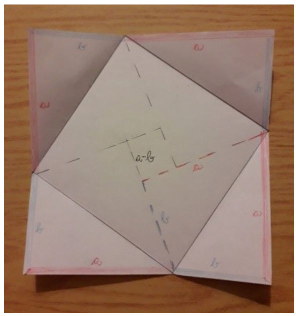




1- Découpez un carré dans une feuille de papier.

2- Divisez chaque côté en deux segments de longueur *a* et *b*.

3- Tracez une ligne d'un point à l'autre, comme vu sur les photos.

4 - Pliez la feuille de papier le long des segments obtenus.

5- Tracez une ligne en pointillée le long du côté le plus long (de longueur a dans notre illustration).

6 - L'aire du carré de côtés *a* + *b*, $(a + b)^2$, est plus grande que celle des 8 triangles rectangles de côtés *a* et *b*, soit 8 x (*ab*) / 2. Nous obtenons l'égalité si et seulement si a = *b*.