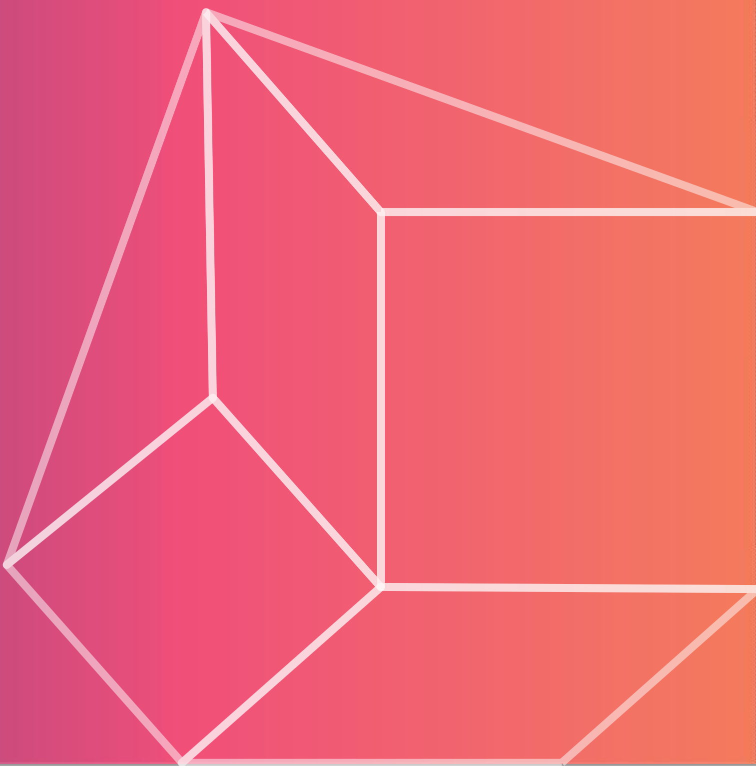
02



Teorema del Coseno

Argomento: Trigonometria

Tema: Dimostrare il teorema del coseno con il taglia e incolla

Abilità: Visualizzare un teorema di trigonometria. Dimostrarlo attraverso il confronto di figure

Materiale: Cartoncino; squadre; lapis; pennarelli; forbici.

Classe/età: 17/18 anni

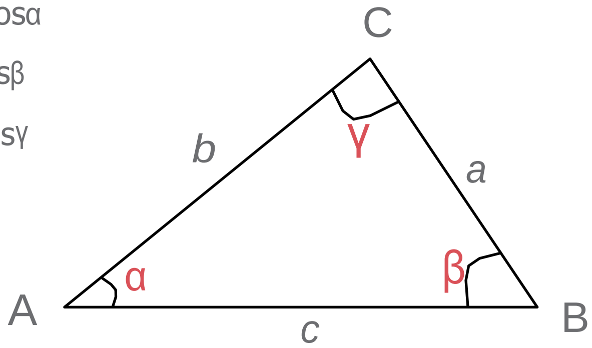
Math Reality

Il Teorema del coseno

(detto anche legge dei coseni) mette in relazione i lati di un triangolo con il coseno di uno qualunque dei suoi angoli.

Seguendo la nomenclatura in figura, il teorema del coseno può essere espresso da:

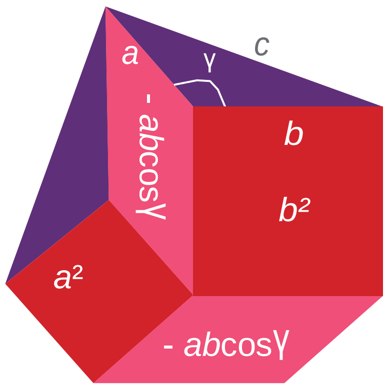
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

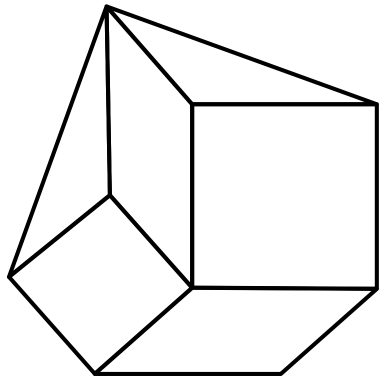


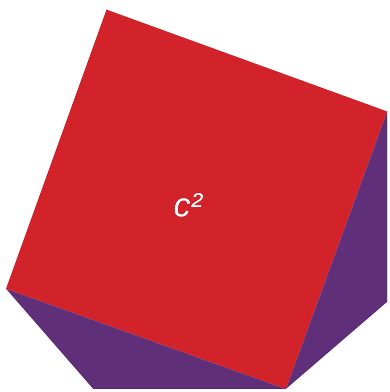
Questo teorema era già noto nel 3° secolo dopo Cristo: negli Elementi di Euclide infatti è contenuta una formulazione equivalente del teorema, nonostante il concetto di coseno non fosse ancora noto a quei tempi.

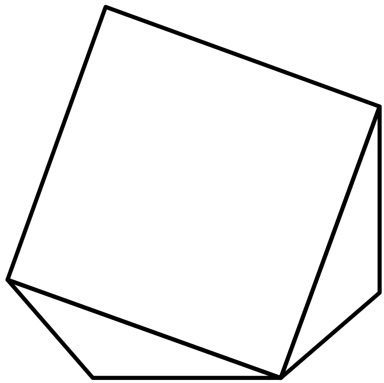
Euclide affronta separatamente il caso di triangoli ottusangoli e triangoli acutangoli (corrispondenti rispettivamente al caso di coseno negativo o coseno positivo). Nel 15esimo secolo, Jamshīd al-Kāshī, matematico ed astronomo persiano, fornì la prima enunciazione del teorema del coseno nella forma in cui lo conosciamo attualmente. Per questo motivo, sin dal 1900, in Francia il teorema del coseno è tuttora noto come Théorème d'al-Kāshī. In Italia il Teorema del coseno è noto come Teorema di Carnot, ed è utilizzato, insieme al teorema dei seni, nella risoluzione dei triangoli qualunque.

1









1) Disegna un triangolo come quello viola in figura, con i lati a, b, c ed un angolo ottuso γ

2) Con riga e squadra disegna la prima figura:

- un quadrato rosso costruito sul lato inferiore del triangolo (lato b);
- il parallelogramma rosa aggiungendo i due lati paralleli mancanti;
- il quadratino rosso di lato a;
- il secondo triangolo viola, aggiungendo il terzo lato mancante;
- il parallelogramma rosa più in basso, aggiungendo i due lati paralleli mancanti.

3) Ricava l'area della figura rosa con semplici considerazioni di trigonometria: la figura in rosa è un parallelogramma di base b. L'altezza del parallelogramma è $-a\cos\gamma$. L'area del parallelogramma è data da base per altezza, ed è uguale a $-ab\cos\gamma$.

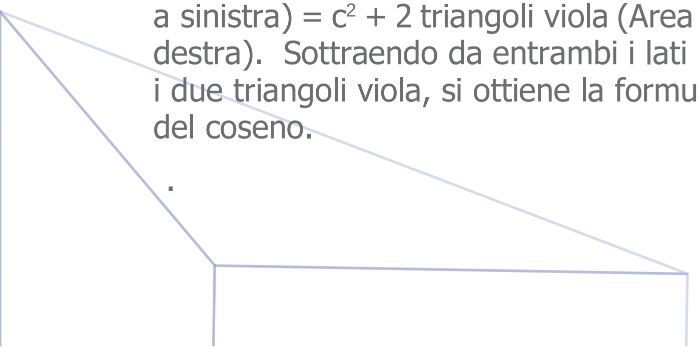
4) Con riga e squadra disegna la seconda figura:

- disegna il quadrato rosso di lato c;
- aggiungi due triangoli viola come indicato in figura.

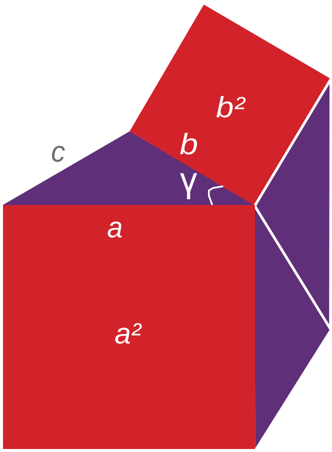
5) Taglia le due figure ottenute e verifica l'equivalenza delle loro aree. Come si può facilmente vedere, le due figure sono sovrapponibili, quindi hanno la stessa area. Questo significa che:

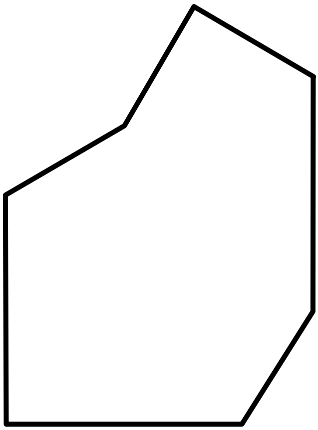
$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ + 2 triangoli viola (Area della figura a sinistra) = c^2 + 2 triangoli viola (Area della figura a destra). Sottraendo da entrambi i lati dell'uguaglianza i due triangoli viola, si ottiene la formula del teorema del coseno.

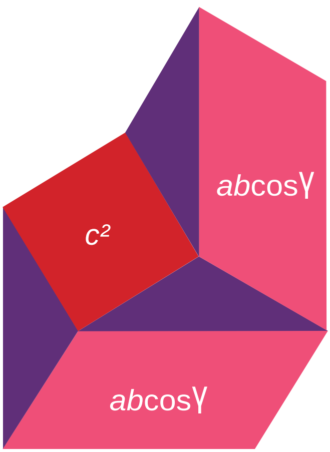
.

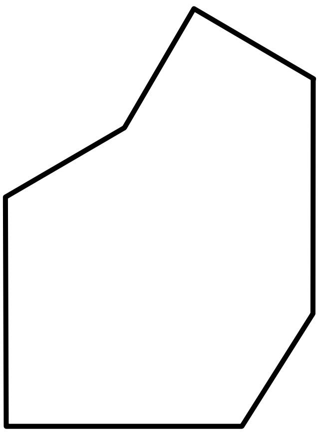


2









Stesso procedimento, ma con un triangolo acutangolo

1) Disegna un triangolo come quello viola in figura, con i lati a, b, c ed un angolo acuto

2) Con riga e squadra disegna la prima figura:

- un quadrato rosso di lato b;
- il quadratino rosso di lato a;
- completa la figura a destra aggiungendo un parallelogramma e dividendolo in due triangoli viola;

3) Con riga e squadra disegna la seconda figura:

- un quadratino rosso di lato c;
- tre triangoli viola come in figura;
- completa la figura aggiungendo due parallelogrammi rosa come mostrato in figura.

4) Ricava l'area della figura rosa con semplici considerazioni di trigonometria: la figura in rosa è un parallelogramma di base a. L'altezza del parallelogramma è $b\cos\gamma$. L'area del parallelogramma è data da base per altezza, ed è uguale ad $ab\cos\gamma$.

5) Taglia le due figure ottenute e verifica l'equivalenza delle loro aree.: Come si può facilmente vedere, le due figure sono sovrapponibili, quindi hanno la stessa area. Questo significa che:

$a^2 + b^2$ + 3 triangoli viola (Area della figura a sinistra) =
$c^2 + 2ab\cos\gamma$ + 3 triangoli viola (Area della figura a destra)

Sottraendo da entrambi i lati dell'uguaglianza i tre triangoli viola, e spostando il termine $2ab\cos\gamma$ da destra a sinistra, si ottiene la formula del teorema del coseno.