08

Media aritmetica e media geometrica

Argomento: Aritmetica
Tema: Illustrazione della disuguaglianza tra la media aritmetica e quella geometrica.
Abilità: Realizzare figure geometriche seguendo le istruzioni.
Materiale: carta millimetrata, forbici, righello
Classe/età: 14/15 anni

Disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica

Per un'interpretazione geometrica della disuguaglianza MA - MG, si consideri un rettangolo con lati di lunghezza x e y. Il suo perimetro è 2x + 2y e la sua area è xy. Allo stesso modo, il perimetro di un quadrato di lato $\sqrt{xy}$ è $4\sqrt{xy}$ e l'area è la stessa di quella del rettangolo.
Il caso più semplice e non banale della disuguaglianza MA - MG implica per i perimetri che $2x + 2y \geq 4\sqrt{xy}$ e che solo il quadrato ha il perimetro più piccolo tra tutti i rettangoli di uguale area.

La disuguaglianza delle medie aritmetica e geometrica afferma che la media aritmetica di una serie di numeri reali non negativi è maggiore o uguale alla media geometrica della stessa serie.

Un'importante applicazione pratica in matematica finanziaria è il calcolo del tasso di rendimento: il rendimento annualizzato, calcolato tramite la media geometrica, è inferiore al rendimento medio annuo, calcolato con la media aritmetica (o uguale se tutti i rendimenti sono uguali). Questo è importante nell'analisi degli investimenti, poiché il rendimento medio sovrastima l'effetto cumulativo.

La media aritmetica di una serie di n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è la somma

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

La media geometrica è definita come la radice n-esima del prodotto di n numeri non-negativi. Per una serie di n numeri non-negativi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la media geometrica è definita come:

$$\sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$

Per una serie di n numeri non negativi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la disuguaglianza AM – GM può essere scritta come

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$

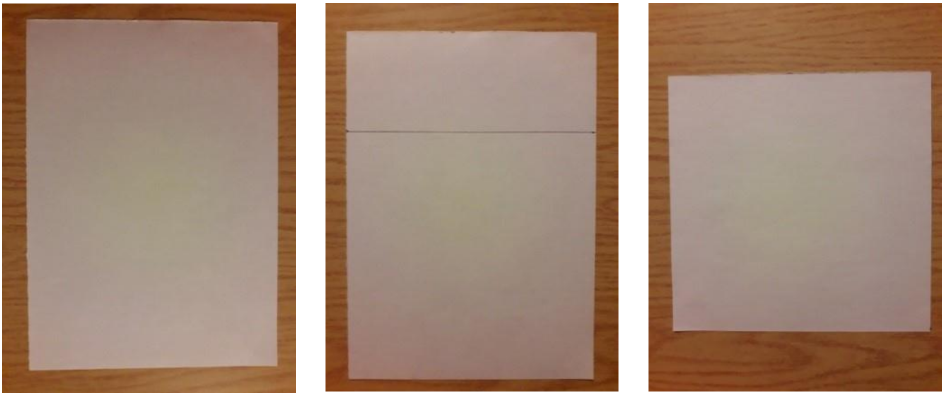
valendo l'uguaglianza se e solo se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Nel caso di due numeri non negativi a and b, la disuguaglianza diventa

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

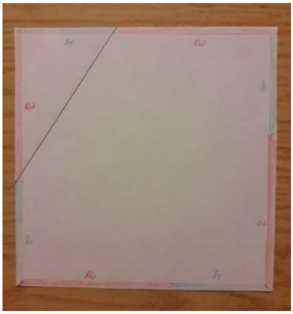
valendo l'uguaglianza se e solo se $a = b$.

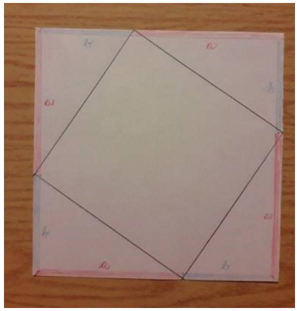
La disuguaglianza AM – GM è fondamentale per dimostrare alter disuguaglianze. Ecco una dimostrazione “visiva” qua sotto.



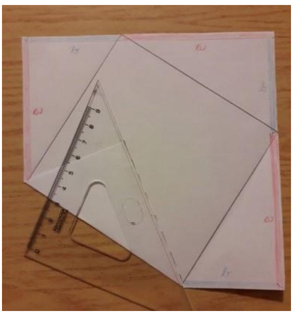
1- Ritaglia un quadrato di carta

2- Dividi ciascun lato in due segmenti di lunghezza a e b.

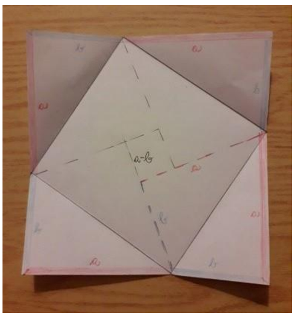




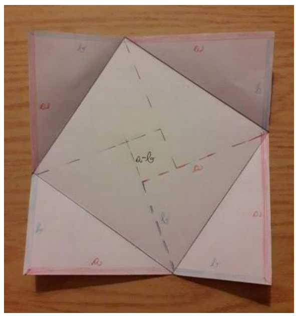
3- Traccia quattro linee da punto a punto, come in figura



4 – Piega il foglio seguendo le line disegnate



5- Disegna una linea tratteggiata ricalcando i lati lunghi a (vedi figura)



6 – L'area del quadrato di lato (a + b) è $(a + b)^2$, I ed è maggiore dell'area degli 8 triangoli di cateti a e b, che è $8\frac{ab}{2}$. Si ottiene una uguaglianza se e solo se a = b.