

Regula cosinusului

Subiectul: Trigonometrie

Tema: Ilustrează teorema cosinusului prin tăiere și lipire

Abilități: Vizualizați teorema trigonometrică. Demonstrați-o prin folosirea figurilor.

Instrumente: carton, echer, creion, creioane colorate, foarfece.

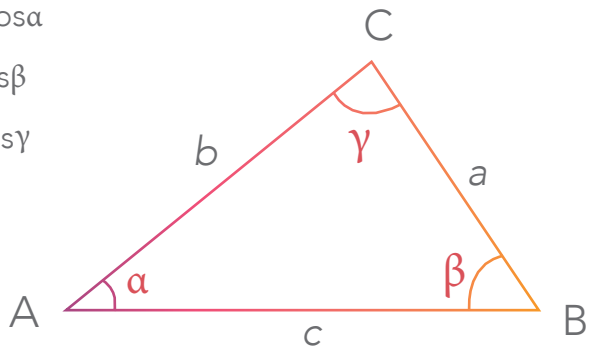
Categorie de vârstă: 17/18 ani

Teorema cosinusului

(numită și regula cosinusului) relatează lungimile laturilor unui triunghi și cosinusul oricărui unghi al său.

Urmărind notațiile din figură, Regula Cosinusului poate fi exprimată ca:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

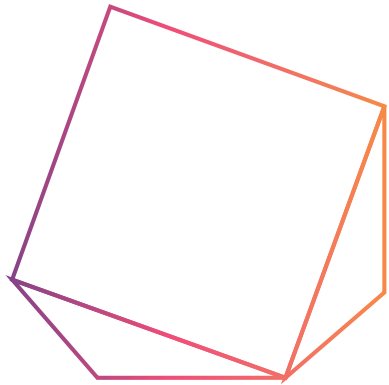
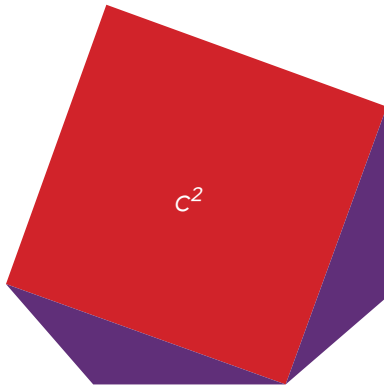
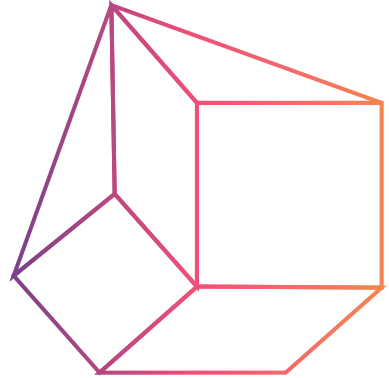
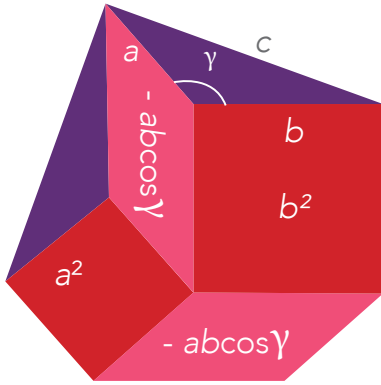


Această regulă a fost deja cunoscută din secolul 3 (î.Hr) de când Elementele lui Euclid conțineau o versiune echivalentă a acestei afirmații, chiar dacă noțiunea de cosinus nu era încă dezvoltată în acel moment. Euclid a tratat separat cazurile de triunghiuri obtuzunghice și ascuțitunghice (corespunzând celor două cazuri negative sau pozitive ale cosinusului).

În secolul 15, Jamshīd al-Kāshī, un matematician și astronom persian a furnizat

afirmații explicite despre regula cosinusului în forma potrivită pentru folosirea modernă. De aceea din anii 1990, în Franța Teorema Cosinusului este încă știută ca și Teorema lui al-Kāshī. În Italia, Teorema cosinusului este de obicei știută ca Teorema di Carnot, este folosită împreună cu Teorema sinusului pentru a rezolva orice triunghi.

1 |



1) Desenați un triunghi: cel violet în figura cu laturile a, b, c și un unghi obtuz γ .

2) Cu echerul desenați în prima figură:

- desenați pătratul mare și roșu cu latura b ;
- desenați paralelogramul roz prin adăugarea celor două laturi paralele care lipsesc;
- desenați pătratul mic, roșu cu latura a ;
- desenați al doilea triunghi violet prin adăugarea laturii a treia;
- desenați paralelogramul inferior roz prin adăugarea celor două laturi paralele care lipsesc;

3) Găsiți aria părții roz a figurii folosind trigonometria de bază : figura roz este un paralelogram al cărui bază este b . Înălțimea paralelogramului este $-a \cdot \cos \gamma$. Aria este baza ori înălțimea și este egală cu $-abc \cos \gamma$.

4) Desenați a doua figură în întregime folosind echerul:

- desenați un pătrat mare, roșu cu latura c ;
- adăugați două triunghiuri violet ca și în figura alăturată

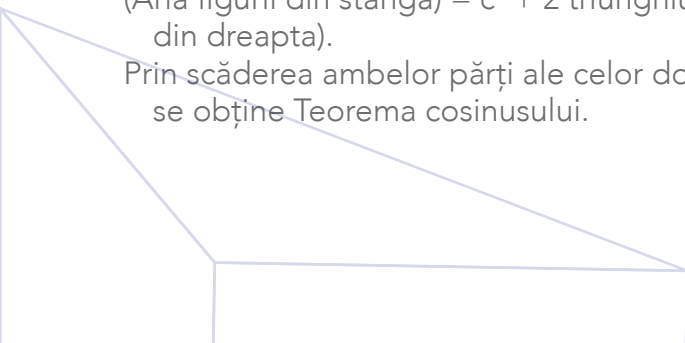
5) Taiți cele două figuri și verificați echivalența ariilor lor.

După cum se poate vedea ușor, cele două figuri sunt suprapuse, deci au aceeași arie. Înseamnă că:

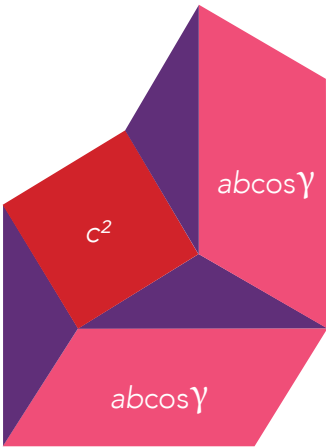
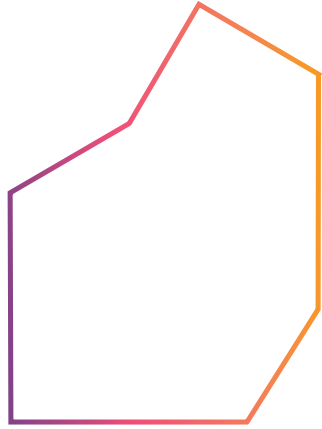
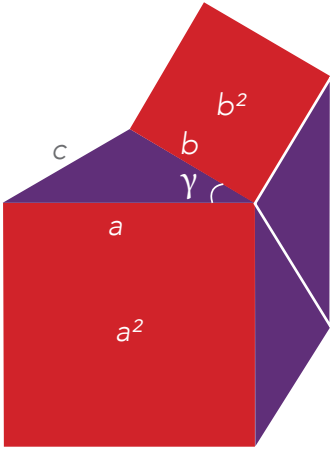
$$a^2 + b^2 - 2abc \cos \gamma + 2 \text{triunghiuri violet}$$

(Aria figurii din stânga) = $c^2 + 2 \text{triunghiuri violet}$ (Aria figurii din dreapta).

Prin scăderea ambelor părți ale celor două triunghiuri violet, se obține Teorema cosinusului.



2 |



Aceeași procedură, dar cu un triunghi ascuțitunghic.

- 1) Desenați un triunghi: cel violet din figura alăturată cu laturile a , b , c și unghiul ascuțit γ .
 - 2) Desenați cu echerul în prima figură:
 - desenați patratul mare, roșu cu latura a ;
 - desenați patratul mic, roșu cu latura b ;
 - completați figura din dreapta desenând un paralelogram și împărțiți-l în două triunghiuri violete;
 - 3) Desenați cu echerul în prima figură:
 - desenați pătratul mic, roșu cu latura c ;
 - adăugați trei triunghiuri violet ca în figura alăturată;
 - completați figura adăugând două paralelograme roz ca în figura alăturată;
 - 4) Găsiți aria părții roz a figurii folosind trigonometria de bază:
Figura roz este un paralelogram a cărui bază este a . Înălțimea paralelogramului este $b \cdot \cos \gamma$. Aria este baza ori înălțimea și este egală cu $ab \cdot \cos \gamma$.
 - 5) Tăiați cele două figuri și verificați echivalența celor două arii.
Rezultă că:
 $a^2 + b^2 + 3$ triunghiuri violet (aria figurii din partea stângă = $c^2 + 2ab \cos \gamma + 3$ triunghiuri violet (Aria figurii din partea dreaptă)
- Prin scăderea ambelor părți ale celor trei triunghiuri violet și mutând $2ab \cos \gamma$ din dreapta în stânga se obține teorema cosinusului.