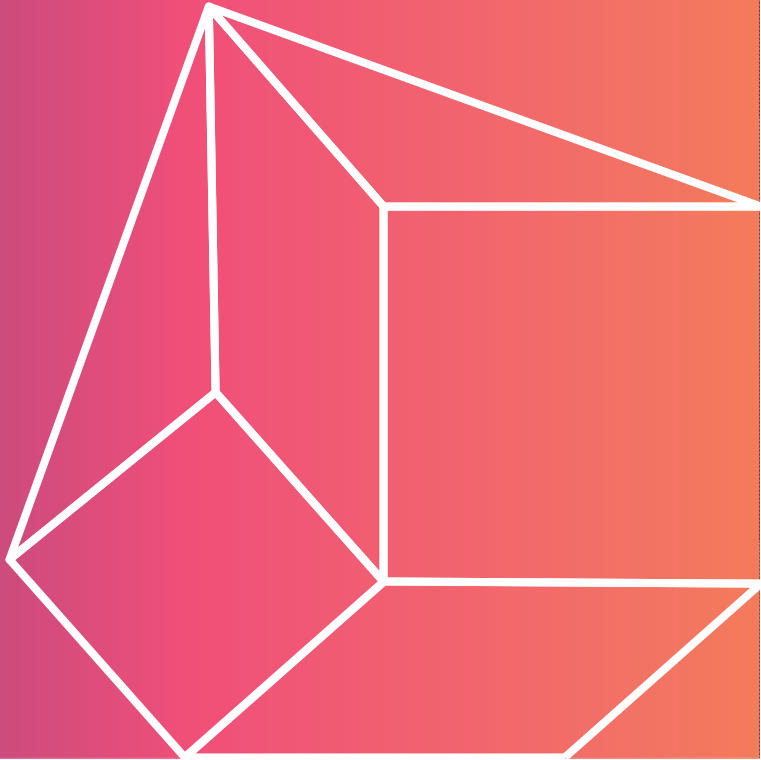


# 02



## Poučak o kosinusu

Područje: Trigonometrija

Tema: Poučak o kosinusu

Ishodi: Učenik će ilustrirati poučak o kosinusu

Matrijal: Karton, trokuti, olovka, bojice, škare

Razina: 15-18 godina

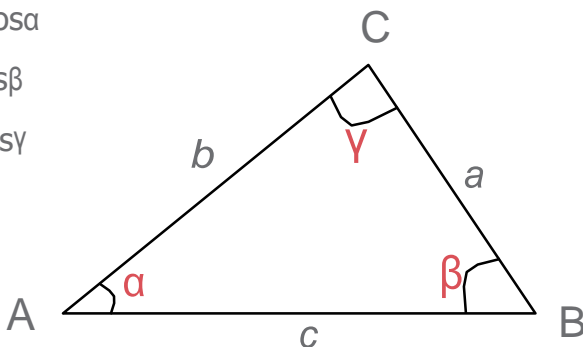


# Poučak o kosinusu

(ili kosinusov poučak) povezuje duljinu stranica trokuta s kosinusom bilo kojeg njegovog kuta.

Slijedeći oznake na slici, poučak o kosinusu može se izraziti na sljedeći način:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$



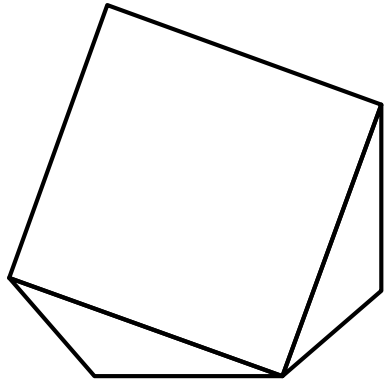
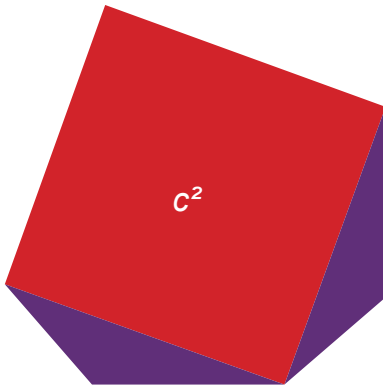
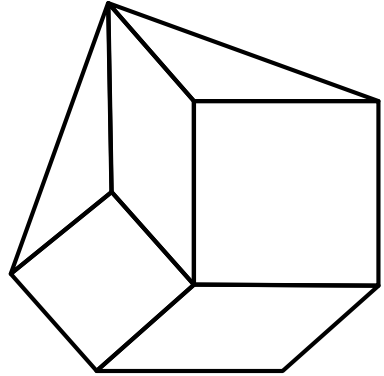
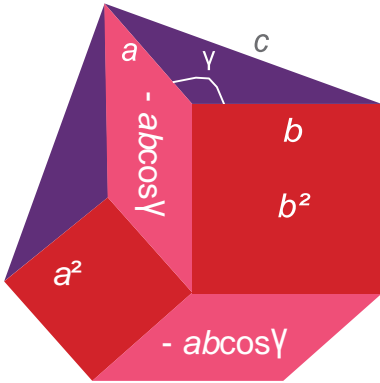
Ovaj poučak bio je poznat već u 3. stoljeću prije Krista jer Euklidovi Elementi sadrže ekvivalentnu verziju ove tvrdnje, iako pojam kosinusa u ono doba još nije bio razvijen. Euklid je zasebno obrađivao tupokutne i šiljastokutne trokute (koji odgovaraju slučajevima negativnih i pozitivnih kosinusa).

U 15. st. Jamshīd al-Kāshī, perzijski matematičar i astronom, prvi je izrazio tvrdnju poučka o

kosinusu koja je pogodna za suvremenu uporabu. Zbog toga se od 1990-ih u Francuskoj poučak o kosinusu naziva i Théorème d'Al-Kāshī.

U Italiji se ovaj poučak naziva Teorema di Carnot, i koristan je, uz poučak o sinusima, za rješavanje bilo kojeg trokuta.

1 |



1) Nacrtaj trokut: ljubičasto obojen na slici sa stranicama duljina  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i tupim kutom.

2) Uz pomoć trokuta nacrtaj cijeli prvi oblik:

- nacrtaj veliki crveni kvadrat sa stranicom duljine  $b$ ;
- nacrtaj ružičasti paralelogram dodajući dvije paralelne stranice koje nedostaju;
- nacrtaj mali crveni kvadrat sa stranicom duljine  $a$ ;
- nacrtaj drugi ljubičasti trokut dodajući treću stranicu koja nedostaje;
- nacrtaj donji ružičasti paralelogram dodajući dvije paralelne stranice koje nedostaju.

3) Izračunaj površinu ružičastog dijela koristeći osnovne trigonometrijske identitete: Ružičasti oblik je paralelogram, čija je baza duljine  $b$ . Visina ovog paralelograma je  $-a \cdot \cos \gamma$ . Površina paralelograma jednaka je produktu baze i visine paralelograma te iznosi  $-abc \cos \gamma$ .

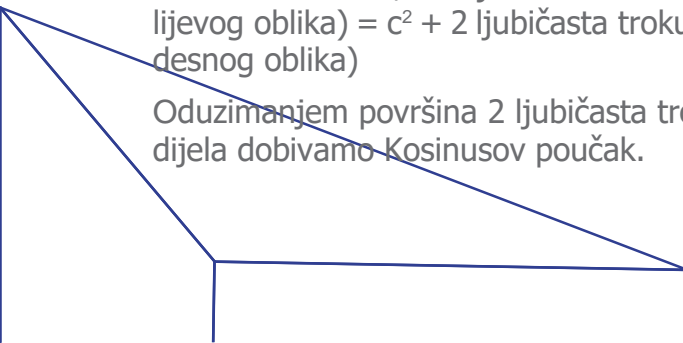
4) Trokutom nacrtaj drugi oblik:

- nacrtaj veliki crveni kvadrat sa stranom duljine  $c$ ;
- dodaj dva ljubičasta trokuta kao što je prikazano na slici.

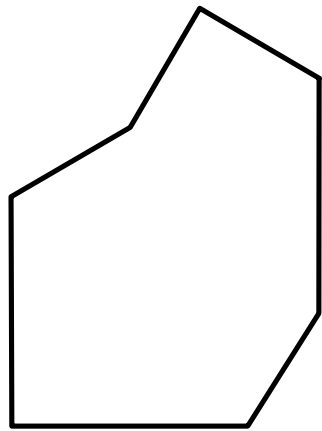
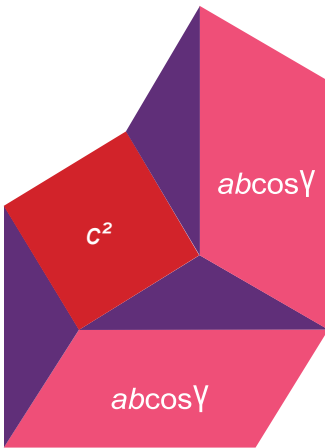
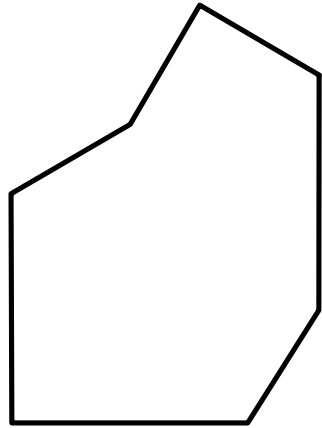
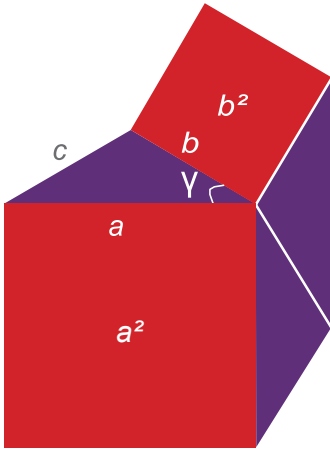
5) Izreži ova dva oblika i dokaži jednakost njihovih površina. Lako se može vidjeti da su ova dva oblika jednakog oblika i površine. To znači da vrijedi:

$a^2 + b^2 - 2abc \cos \gamma + 2$  ljubičasta trokuta (površina lijevog oblika) =  $c^2 + 2$  ljubičasta trokuta (površina desnog oblika)

Oduzimanjem površina 2 ljubičasta trokuta od oba dijela dobivamo Kosinusov poučak.



# 2 |





Isti postupak, ali na primjeru šiljastokutnog trokuta.

- 1) Nacrtaj trokut: ljubičasto obojen na slici sa stranicama duljina  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i šiljastim kutom  $\gamma$ .
- 2) Trokutom nacrtaj cijeli oblik:
  - nacrtaj veliki crveni kvadrat sa stranicom duljine  $a$ ;
  - nacrtaj mali crveni kvadrat sa stranicom duljine  $b$ ;
  - dovrši oblik s desne strane tako da nacrtáš paralelogram i podijeliš ga na dva ljubičasta trokuta;
  - nacrtaj donji ružičasti paralelogram dodajući dvije paralelne stranice koje nedostaju.
- 3) Trokutom nacrtaj cijeli drugi oblik:
  - nacrtaj mali crveni kvadrat sa stranicom duljine  $c$ ;
  - dodaj tri ljubičasta trokuta kao što je prikazano na slici;
  - dovrši oblik dodajući dva ružičasta paralelograma.

4) Izračunaj površinu ružičastog dijela primjenom osnovnih trigonometrijskih identiteta: blijedoružičasti oblik je paralelogram, čija osnovica je  $a$ . Visina ovog paralelograma je  $b \cdot \cos \gamma$ . Površina paralelograma jednaka je produktu osnovice i visine te iznosi  $abc \cos \gamma$ .

5) Izreži ova dva oblika I dokaži da su površine jednake. Kao što se može vidjeti, dva oblika imaju jednak oblik i jednaku površinu.

To znači da:

$$a^2 + b^2 + 3 \text{ ljubičasta trokuta (površina lijevog oblika)} = c^2 + 2abc \cos \gamma + 3 \text{ ljubičasta trokuta (površina desnog oblika)}$$

Oduzimanjem površina tri ljubičasta trokuta od oba dijela, i pomičući površinu  $2abc \cos \gamma$  s desna na lijevo, dobijemo Kosinuso v poučak.