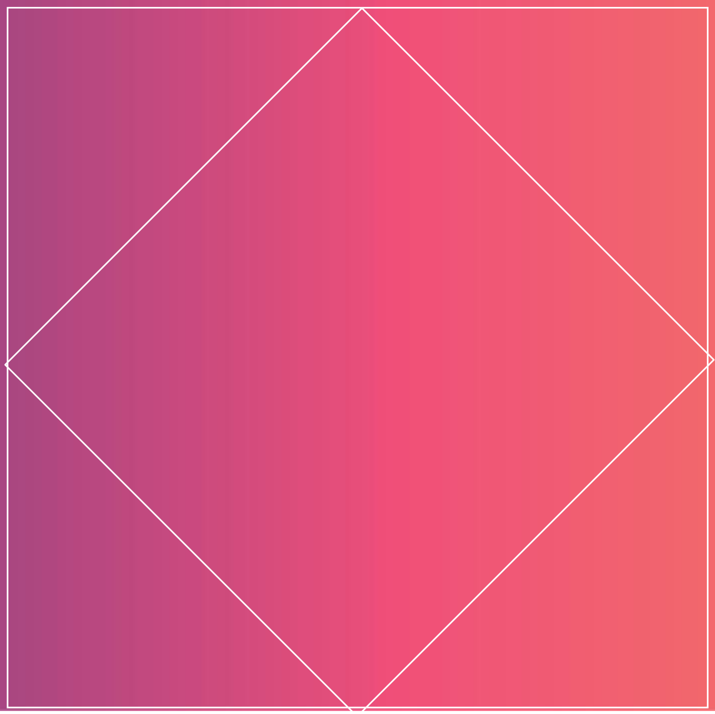
08



Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine

Područje: Aritmetika
Tema: Nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine
Ishodi: Učenik će dokazati nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine primjenom geometrije
Materijal: Milimetarski papir, škare, ravnalo
Razina: 14-15 godina

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine (AG nejednakost)

Za geometrijsku interpretaciju nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine razmotrimo pravokutnik sa stranicama duljina x i y. Opseg tog pravokutnika je 2x + 2x, a površina xy. Slično tome, opseg kvadrata stranice duljine $\sqrt{xy}$ iznosi $4\sqrt{xy}$ i ima jednaku površinu kao i pravokutnik sa stranicama duljina x i y. Najjednostavniji netrivijalni slučaj AG nejednakosti podrazumijeva da je $2x + 2y \geq 4\sqrt{xy}$ i da kvadrat ima najmanji opseg među svim pravokutnicima jednake površine.

Nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine znači da je aritmetička sredina niza pozitivnih realnih brojeva veća ili jednaka geometrijskoj sredini tih brojeva.

Praktična primjena pri izračunu stope povrata u financijskoj matematici: godišnji povrat izračunat geometrijskom sredinom manji je od prosječnog godišnjeg povrata izračunatog aritmetičkom sredinom (ili jednak ako su svi povrati jednaki). Ovo je važno pri analizi investicija kada prosječan povrat premašuje kumulativni iznos.

Aritmetička sredina niza brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je broj

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Geometrijska sredina je definirana kao n-ti korijen umnoška svih n pozitivnih realnih brojeva. Za skup pozitivnih realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ geometrijska sredina jest broj:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Za skup pozitivnih realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$, AG nejednakost je dana izrazom:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

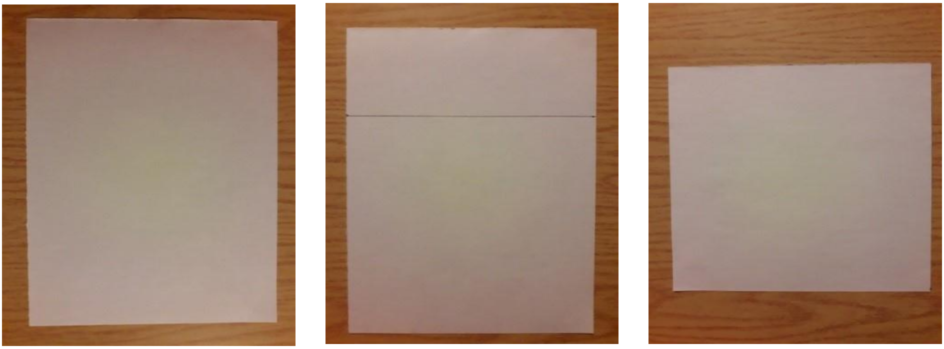
pri čemu jednakost vrijedi samo i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

U slučaju dva pozitivna realna broja a i b vrijedi:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

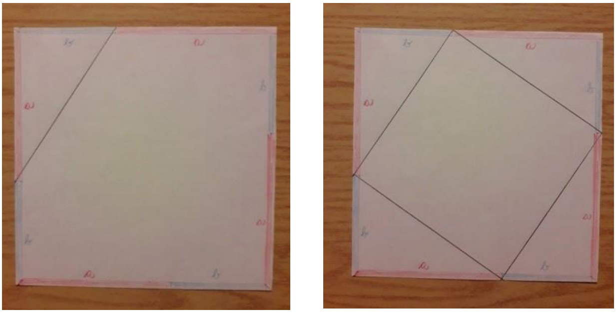
s jednakošću samo u slučaju da je $a = b$.

AG nejednakost je osnovna nejednakost koja se koristi u dokazivanju ostalih nejednakosti. U nastavku se nalazi vizualna demonstracija.

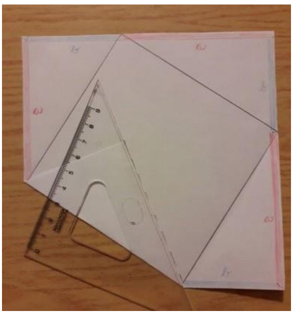


1- Izreži kvadrat iz lista papira.

2- Podijeli svaku stranicu kvadrata na dva dijela s duljinama a i b. Označi točke koje dijele stranice kvadrata.

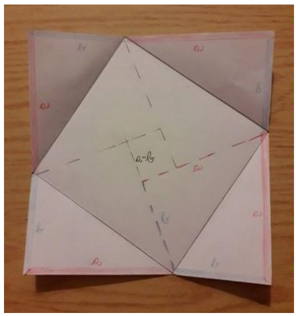


3- Nacrtaj dužine koje spajaju točke na susjednim stranicama kvadrata kao što je prikazano na slici.



4 – Preklopi rub papira duž dobivenih dužina.

5- Nacrtaj isprekidanu crtu uz dužu stranu ruba preklopljenog papira (duljina a u našoj ilustraciji).



6 - Površina kvadrata sa stranicama duljina $a + b$, je veća nego površina 8 pravokutnih trokuta s katetama a i b: $(a + b)^2 > 8\frac{ab}{2}$. Jednakost površina se dobije samo u slučaju $a = b$.