LESSON SCENARIO 08:

DISUGUAGLIANZA TRA MEDIE

Argomento: Aritmetica

ETA': 14-15

PRE-REQUISITI: OPERATIONI CON LE FRAZIONI, OPERATIONI CON I RADICALI, MEDIA ARITMETICA, MEDIA GEOMETRICA, CAPITALE INIZIALE, CAPITALE FINALE, INTERESSE SEMPLICE E INTERESSE COMPOSTO

MATERIE CORRELATE: MATEMATICA FINANZIARIA, ARTE, ARCHITETTURA

RISULTATI D'APPRENDIMENTO

- Calcolo della media aritmetica e della media geometrica in situationi pratiche, concrete

METODI D'INSEGNAMENTO

- Lavoro pratico
- Attività interattive
- Lavoro a coppie

PAROLE CHIAVE

- media aritmetica
- media geometrica
- disuguaglianza
- capitale iniziale
- capitale finale
- interesse semplice
- interesse composto

MATERIALE

- lavagna
- strumenti geometrici
- fogli di lavoro
- forbici
- proiettore
- laptop / computer
- calcolatrice tascabile

ATTIVITA’

Attività 1 - 5 minuti

L'insegnante presenta l'argomento della lezione e ricorda agli studenti i seguenti concetti:

La parola "media" si trova quasi quotidianamente nelle discussioni delle persone, in espressioni come "durata media della vita delle persone", "vita media di un dispositivo", "peso medio di un prodotto". La media è un valore tipico o centrale di molti dati. Affinché la dimensione media abbia un carattere oggettivo, è necessario scegliere il giusto tipo di media. I mezzi più usati sono: media aritmetica; media geometrica; media armonica; media quadrata /quadratica.

La media aritmetica si una serie di *n* numbers $x_1, x_2, \dots, x_n$è la somma dei numeri divisa per *n*:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

La media geometrica è definita come la radice n-esima del prodotto di n numeri non negativi. Per un insiemedi *n* numeri non negativi $x_1, x_2, \dots, x_n$,la media geometrica è data da:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\,.$$

Attività 2 - 15 minuti

Per vedere quanto sia importante scegliere il giusto tipo di media, l'insegnante presenta la seguente attività pratica e ricorda le nozioni necessarie.

Gli studenti sono divisi in tre coppie: bianco, rosso e nero.

L'insegnante ricorda agli studenti come calcolare il capitale finale in caso di interesse semplice e interesse composto:

- **Nel caso dell'interesse semplice il capitale finale è dato da $C_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$**
- **Nel caso dell'interesse composto il capitale finale è dato da $C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$**

L'insegnante presenta il problema da risolvere:

Una persona deposita presso la banca un importo (capitale iniziale) di 1.000.000 lei in un periodo di 5 anni, con tassi di interesse annuali che variano come segue: 1%, 2%, 4%, 5%,

10%. Dobbiamo calcolare il tasso annuale medio (se applicabile) e il capitale finale alla fine dei 5 anni.

Le squadre bianche useranno il percorso più lungo, ma più sicuro, calcolando i tassi di interesse semplici per ogni anno.

Le squadre rosse calcoleranno il tasso di interesse medio utilizzando la media aritmetica, quindi calcoleranno il capitale finale utilizzando l'interesse composto.

Le squadre nere calcoleranno il tasso di interesse medio utilizzando la media geometrica, quindi calcoleranno il capitale finale utilizzando il tasso di interesse composto.

Le squadre bianche calcolano il capitale finale corrispondente a ogni anno.

Year 1: $C_1 = C_0 \cdot \left(1+\frac{p_1}{100}\right)$ = 1000000·1,01=1010000 lei

Year 2: $C_2 = C_1 \cdot \left(1+\frac{p_2}{100}\right)$= 1010000·1,02=1030200 lei

Year 3: $C_3 = C_2 \cdot \left(1+\frac{p_3}{100}\right)$= 1030200·1,04=1071408 lei

Year 4: $C_4 = C_3 \cdot \left(1+\frac{p_4}{100}\right)$= 1071408·1,05=1124978,40 lei

Year 5: $C_5 = C_4 \cdot \left(1+\frac{p_5}{100}\right)$= 1124978,40·1,10=1237476,24 lei.

The red teams calculate:

The average coefficient $1+\frac{p}{100}=\frac{1{,}01+1{,}02+1{,}04+1{,}05+1{,}10}{5}=1,044.$

The final capital: $C_5 = C_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^5$ = 1000000·$(1,044)^5$ = 1240230,745396224 lei.

The black teams calculate:

The average coefficient:$1+\frac{p}{100}=\sqrt[5]{1,01\cdot 1,02\cdot 1,04\cdot 1,05\cdot 1,10}=$
$\sqrt[5]{1,23747624}\ \approx 1,04353585.$

The final capital: $C_5 = C_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^5 \approx$ 1000000·$(1,04353585)^5 \approx$ 1000000·1,23747624 $\approx$ 1237476,24lei.

After each team presents its result, the conclusions are drawn. White and black teams achieved the same result, the correct one. The red team obtained an extra 2700 lei. Why? Because they used an additive operation (arithmetic mean) in the case of a multiplicative process (the final capital in the case of compound interest).

Attività 3 - 15 minuti

L'insegnante presenta la disuguaglianza delle medie.

Per un elenco di numeri non negativi, usando le notazioni matematiche, AM-GM, la disuguaglianza è scritta come:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$

e l'uguaglianza si ha se e solo se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Nel caso di due numeri non negativi a e b, si ha:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

E si ha l'uguaglianza se e solo se $a = b$.

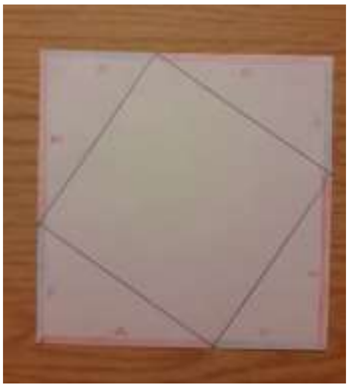
La disuguaglianza tra MA–MG è una disuguaglianza di base, usata per dimostrare altre disuguaglianze.

Di seguito hai una dimostrazione visiva:

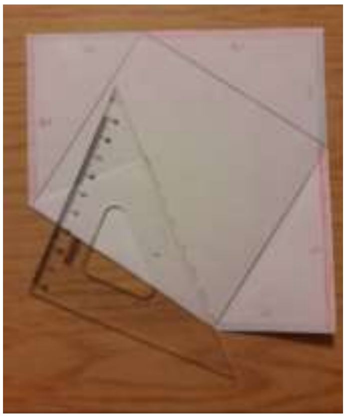
1. Crea un quadrato da un foglio di carta

2. Dividi ogni lato in due segmenti di lunghezza a e b.

3. **Traccia una linea da un punto all'altro, come mostrato nelle immagini:**



4. **Piega il pezzo di carta lungo i segmenti risultanti**

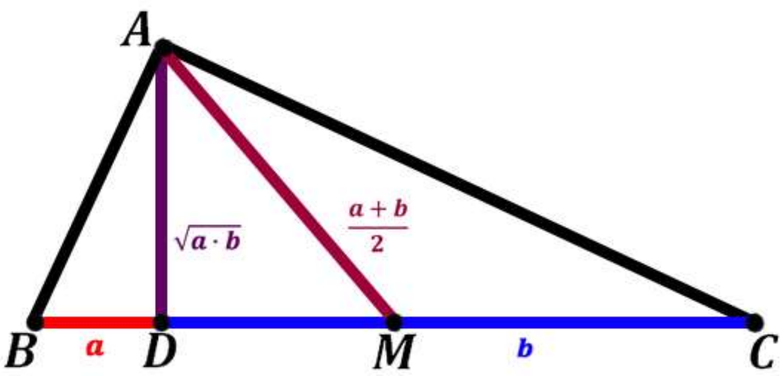


5. **Traccia una linea tratteggiata lungo il lato più lungo (di lunghezza a nella nostra illustrazione).**

6. L'area del quadrato di lato $a + b$, $(a + b)^2$, è 8 volte più grande di quella di un triangolo rettangolo di cateti a e b, che è $8 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$. Si ha l'uguaglianza solo se $a = b$.

Attività 4 - 5 minuti (eseguita solo se rimangono almeno 15 minuti per la valutazione)

L'insegnante presenta un'interpretazione geometrica della disuguaglianza tra le medie:



In qualsiasi triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è la media geometrica delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e la mediana relativa all'ipotenusa è la media aritmetica delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. La lunghezza dell'altezza è minore o uguale alla lunghezza della mediana.

Scheda di valutazione

Sono necessarie soluzioni complete per tutti i problemi. È consentito l'uso della calcolatrice tascabile.

(10p) 1.Determina il valore verità della seguente frase:

„$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc}, \forall a, b, c \in (0, \infty)$" (VERO o FALSO) e giustifica la risposta.

(10p) 2. Calcola la media aritmetica dei numeri 23, 57, 61.

(10p) 3. Calcola la media geometrica dei numeri: 2, 6,18.

(15p) 4. Calcola la media aritmetica dei numeri: $3 + \sqrt{8}$ e $3 - \sqrt{8}$.

(15p) 5. Calcola la media aritmetica dei numeri $3 + \sqrt{8}$ e $3 - \sqrt{8}$.

(30p) 6. Una persona deposita alla banca un importo (capitale iniziale) di 1.000.000 di lei in un periodo di 3 anni, con tassi di interesse annuali che variano come segue: 1%, 4%, 5%. Calcola il capitale finale alla fine dei 3 anni.

10 punti vengono assegnati d'ufficio.

L'orario di lavoro è di 15 minuti.

Soluzioni del test:

1.la frase è falsa. Se *a = b = c*,allora la disuguaglianza diventa un'uguaglianza.

2. $\frac{23+57+61}{3} = \frac{141}{3} = 47.$

3.$\sqrt[3]{2 \cdot 6 \cdot 18} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6.$

4. $\frac{(3+\sqrt{8})+(3-\sqrt{8})}{2}=\frac{6}{2}=3.$

5. $\sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})}=\sqrt{9-8}=1.$

6. **Soluzione 1**

Calcoliamo il capitale finale corrispondente ad ogni anno:

Anno1: $C_1 = C_0 \cdot \left(1+\frac{p_1}{100}\right)$ = 1.000.000·1,01=1.010.000 lei

Anno 2: $C_2 = C_1 \cdot \left(1+\frac{p_2}{100}\right)$ = 1.010.000·1,04=1.050.400 lei

Anno 3: $C_3 = C_2 \cdot \left(1+\frac{p_3}{100}\right)$ = 1. 050.400·1,05= 1.102.920lei.

Soluzione 2

Calcoliamo il coefficiente medio: $1+\frac{p}{100}=\sqrt[3]{1,01\cdot 1,04\cdot 1,05}=\sqrt[3]{1,10292}=1,033192719911520607859213093408 8.$

Calcoliamo il capitale finale: $C_3 = C_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ = 1.000.000·$(1,0331927199115206078592130934088)^3$=1.000.000·$1,10292$= $1.102.920$ lei.

LINEE GUIDA ALL'INCLUSIONE

Gli studenti sono uno diverso dall'altro, così come le loro esigenze. Di seguito troverai diversi suggerimenti per poter rendere la lezione di matematica più inclusiva per gli studenti che lottano con disturbi dell'apprendimento.

• Quando assegni compiti alla classe, cerca di suddividerli in sotto comandi. Evita doppi comandi in ciascuna istruzione. Ricorda che in caso di operazioni / esercizi con più passaggi, è fondamentale aiutare gli studenti a scomporre i singoli passaggi.

• Puoi utilizzare delle forme di controllo per i tuoi studenti, per assicurarti che abbiano completato tutti i passaggi

• Assicurati che il carattere, l'interlinea e l'allineamento del documento siano accessibili agli studenti con disturbi dell'apprendimento. Si consiglia di utilizzare un carattere sans serif semplice e con spaziatura uniforme, come Arial e Comic Sans. Altre possibili font: Verdana, Tahoma, Century Gothic e Trebuchet. La spaziatura dovrebbe essere 1,5 e si dovrebbe evitare la giustificazione nel testo.

• Alla fine di ogni attività, dedica del tempo a chiedere agli studenti cosa hanno imparato, per capitre meglio il loro processo di apprendimento

• Assicurati che il materiale che gli studenti hanno a disposizione sia abbastanza „maneggevole“

• Durante l'utilizzo di supporti diversi (carta, computer e ausili visivi) sceglie uno sfondo diverso dal bianco, che può essere troppo luminoso per gli studenti con disturbi dell'apprendimento. La scelta migliore sarebbe crema o pastello morbido, ma prova a testare colori diversi per saperne di più sulle preferenze degli studenti.

• Per stimolare la memoria a breve e lungo termine, prepara per tutti gli studenti uno schema che descriva ciò che impareranno in questa lezione, e terminalo con un riassunto di ciò che è stato insegnato. In questo modo rafforzeranno la capacità di ricordare le informazioni.

ESEMPIO:

1. Inizia ogni lezione con un breve "CHECK-IN"

• Oggi studieremo l'argomento (nome dell'argomento)
• Vi parlerò di: (nomina 3 parole chiave legate all'argomento)
• Quindi presenterò gli esercizi: (nomina gli esercizi dal libro o altro testo)

Quindi faremo gli esercizi (spiegare il modo in cui lo studente lavorerà: es. Insieme all'insegnante / in coppia / individualmente)

• Una volta terminati gli esercizi passa al successivo:

2. Quindi termina la lezione con un breve "CHECK-OUT"

• **Durante la lezione abbiamo studiato (argomento della lezione)**
• **Le cose più importanti sono state: (nomina 3 parole chiave collegate all'argomento)**
• **Siamo stati in grado di fare ... (racconta il lavoro svolto dallo studente durante la lezione)**
• **Esploreremo l'argomento la prossima volta quando studieremo (nomina il seguente argomento)**

È un piccolo aggiustamento che richiederà 5 minuti della lezione, ma può fare una grande differenza per lo studente. Prova a renderlo una routine abituale.

BIBLIOGRAFIA

Roger B. Nelsen, Proofs Without Words II - More Exercises in Visual Thinking, Published and Distributed by The Mathematical Association of America, 2000

Internet - https://towardsdatascience.com/on-average-youre-using-the-wrong-average-geometric-harmonic-means-in-data-analysis-2a703e21ea0