



## LESSON SCENARIO 06 VR:

### MONTY HALL

MATERIA: PROBABILITA' CONDIZIONATA

CLASSE/ETÁ: 15-18 ANNI

Prerequisiti: definizione di evento

Correlazione: statistica, matematica finanziaria, teoria dei giochi, intelligenza artificiale, informatica

#### OBIETTIVI D'APPRENDIMENTO

- Usare le teorie della probabilità
- Trovare la probabilità condizionale

#### METODI D'INSEGNAMENTO

- Tecnologia VR
- Lavoro a coppie

#### PAROLE CHIAVE

- teoria della probabilità
- evento
- probabilità condizionale
- paradosso di Monty Hall

#### MATERIALE

- Visori VR
- Lavagna
- Computer, calcolatrice, proiettore

## ATTIVITA'

### INTRODUZIONE: REGOLE DI UTILIZZO DEI VISORI 3D IN CLASSE (5 minuti)

L'insegnante inizia la discussione chiedendo agli studenti le loro aspettative nell'utilizzo della realtà virtuale in classe.

Dopo la discussione l'insegnante definisce il metodo di lavoro e le regole di condotta per per l'utilizzo dei visori VR in classe e per l'apprendimento in ambiente virtuale:

- ascoltare attentamente le istruzioni dell'insegnante
- rimuovere gli ostacoli fisici prima di utilizzare i visori
- lavorare sempre in coppia, mai da soli
- mantenere pulito il dispositivo. Sanificarlo dopo l'uso.

### Attività 1 (5-10 minuti) INTRODUZIONE ALLA LEZIONE

Tipo di attività: frontale

Materiale necessario: lavagna o presentazione PowerPoint

L'insegnante annuncia l'argomento della lezione: Probabilità condizionale

Prerequisiti: esperimento casuale, campione, evento, evento elementare, evento sicuro, evento impossibile, eventi incompatibili, evento opposto, probabilità di un evento, eventi equiprobabili.

**Teorema.** Se  $E$  - la moltitudine di tutti i possibili risultati di un esperimento casuale - è finita e tutti gli eventi elementari sono equiprobabili, allora la probabilità di qualsiasi evento  $A$ , relativo all'esperimento considerato, è

$$P(A) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

**Teorema.** Sia dato un esperimento casuale con  $E$  - la moltitudine di risultati possibili - finiti e non vuoti, ed  $A$  e  $B$  - eventi relativi all'esperimento considerato. Allora:

i)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , se  $A, B$  sono incompatibili;

ii)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , se  $A, B$  non sono incompatibili;

iii)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ , dove  $\bar{A}$  è la probabilità dell'evento contrario ad  $A$ .

## Attività 2 (20 min) PROBABILITA' CONDIZIONALE

Tipo di attività: frontale

Materiale necessario: lavagna o presentazione PowerPoint

L'insegnante annuncia lo scopo della nuova lezione, ovvero valutare la probabilità di un evento che dipende (o dipende solo in apparenza) da un altro evento già verificato.

### Problema 1.

In un'urna ci sono 5 palline bianche e 9 palline nere. Due palline vengono estratte in successione, senza rimettere la prima pallina nell'urna. Gli eventi devono essere considerati: A: "la prima palla estratta è nera"; B: "la prima palla estratta è bianca"; C: "la seconda palla estratta è bianca".

a) Qual è la probabilità dell'evento A?

b) Qual è la probabilità dell'evento C, una volta che l'evento A si sia già verificato?

c) Qual è la probabilità dell'evento C, prima ancora che sia stato verificato B?

Soluzione.

$$a) P(A) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

il numero di casi possibili è  $5 + 9 = 14$

numero di casi favorevoli al raggiungimento dell'evento A è 9, quindi  $P(A) = \frac{9}{14}$ .

b) Dopo il verificarsi dell'evento A, nell'urna sono rimaste 5 palline bianche e 8 palline nere, quindi  $P(C) = \frac{5}{13}$

c) Dopo il verificarsi dell'evento B, nell'urna sono rimaste 4 palline bianche e 9 palline nere, quindi  $P(C) = \frac{4}{13}$

Definizione. Siano due eventi  $A, B \in \mathcal{P}(E)$  tali che  $P(A) > 0$ .

Definiamo la probabilità condizionata di B dato A, come  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Con  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$  - la probabilità che si verifichino entrambi gli eventi A e B è uguale alla probabilità di A moltiplicata per la probabilità condizionata di B dato A.

### Problema 2.

In un'urna ci sono 5 palline bianche e 9 palline nere. Estrarre due palline in successione, senza rimettere la prima pallina nell'urna. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera seguita da una pallina bianca?

Soluzione.

Gli eventi da considerare sono:

A: "la prima palla estratta è nera";

B: "la seconda palla estratta è bianca".

Si ha  $P(A) = \frac{9}{14}$  e  $P(B|A) = \frac{5}{13}$  quindi  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{182}$ .

### Problema 3.

Vengono lanciati contemporaneamente due dadi di colori diversi. Eventi considerati:

A: "il numero col primo dado è inferiore a quello ottenuto col secondo dado";

B: "la somma dei punti ottenuti con i due dadi è minore o uguale a 5".

Qual è la probabilità condizionata di B dato A?

Soluzione.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Poiché i dadi sono di diverso colore, il numero di casi possibili è  $6 \cdot 6 = 36$ .

A =

$\{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}$

B =  $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$

$A \cap B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3)\}$

$$\text{Quindi } P(A) = \frac{15}{36}, P(B) = \frac{10}{36}, P(A \cap B) = \frac{4}{36} \quad \text{e} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{4}{15}.$$

### **Attività 3 (15 min) PROBABILITA' CONDIZIONALE CON L'APPLICAZIONE VR**

L'insegnante assegna il compito agli studenti:

- trova e seleziona l'esercizio PARADOSSO MONTY HALL sullo scaffale degli esercizi
- svolgi il compito nell'applicazione VR

Tipo di attività: lavoro a coppie

Accessori necessari: visori VR

#### **ATTIVITÀ:**

L'insegnante divide gli studenti in coppie. Quindi presenta loro il problema di Monty Hall.

Qual è il problema di Monty Hall?

Conosciuto anche come il paradosso di Monty Hall, il problema delle tre porte, il problema del quizmaster e il problema dell'auto e delle capre, il problema è stato introdotto dal biostatistico Steve Selvin (1975) in una lettera alla rivista The American Statistician. A seconda delle ipotesi fatte, può essere considerato matematicamente identico al problema dei tre prigionieri di Martin Gardner (1959). È stato così chiamato da Selvin dal nome d'arte di Monty Halperin, conduttore del longevo programma televisivo degli anni '60 "Let's make a deal". È un famoso paradosso che ha una soluzione così assurda che la maggior parte delle persone si rifiuta di credere che sia vero.

Il problema è diventato famoso in tutto il mondo nel 1990 con la sua presentazione nella popolare rubrica settimanale "Ask Marilyn" nella rivista Parade Magazine. L'autrice Marilyn vos Savant era, secondo il Guinness dei primati dell'epoca, la persona con il QI più alto al mondo. Riscrivendo con le sue stesse parole un problema che le era stato posto da un corrispondente, Craig Whitaker, vos Savant ha chiesto quanto segue:

"Supponi di essere in un videogioco e ti viene data la possibilità di scegliere tra tre porte: dietro una porta c'è un'auto; dietro le altre, due capre. Scegli una porta, diciamo n. 1, e il conduttore, che sa cosa c'è dietro le porte, apre un'altra porta, diciamo n. 3, che ha una capra. Poi ti dice: "Vuoi scegliere la porta n. 2?" È a tuo vantaggio cambiare la tua scelta? " Lo studente A indossa con cura il suo visore VR e apre l'esercizio PARADOSSO MONTY HALL nella libreria virtuale dell'applicazione VR.

L'allievo B (giocatore) sceglie una porta, l'allievo A (conduttore) apre una delle porte rimanenti. Insieme determinano quale è la probabilità corretta per la seconda scelta. Le probabilità corrette sono  $\frac{1}{3}$  per la porta originariamente scelta e  $\frac{2}{3}$  per la porta che dovrebbe essere scelta la seconda volta.

**Soluzione:** La soluzione presentata da vos Savant in Parade mostra le tre possibili disposizioni di un'auto e due capre dietro le tre porte, e il risultato che si ottiene cambiando o mantenendo la propria scelta dopo aver scelto inizialmente la porta 1:

| Porta 1 | Porta 2 | Porta 3 | Risultato se si mantiene la porta 1 | Risultato se si cambia la scelta |
|---------|---------|---------|-------------------------------------|----------------------------------|
| capra   | capra   | auto    | perde                               | vince                            |
| capra   | auto    | capra   | perde                               | vince                            |
| auto    | capra   | capra   | vince                               | perde                            |

Un giocatore che mantiene la scelta iniziale vince solo in una su tre di queste possibilità ugualmente probabili, mentre un giocatore che cambia vince in due su tre. Un altro modo per capire la soluzione è considerare insieme le due porte inizialmente non scelte. La probabilità dei 2/3 di ritrovare l'auto non è stata cambiata dall'apertura di una di queste porte perché Monty, conoscendo l'ubicazione dell'auto, è certo di rivelare una capra. Quindi la scelta del giocatore, dopo che il conduttore ha aperto una porta, non è diversa dal caso in cui il conduttore offre al giocatore la possibilità di cambiare scelta originale. Cambiare scelta in questo caso dà chiaramente al giocatore una probabilità di 2/3 di scegliere l'auto.

Probabilità condizionata mediante calcolo diretto.

Per definizione, la probabilità condizionale di vincere cambiando, dato che il concorrente sceglie inizialmente la porta 1 ed il conduttore apre la porta 3, è la probabilità dell'evento "l'auto è dietro la porta 2 ed il conduttore apre la porta 3" divisa per la probabilità per "il conduttore apre la porta 3". Queste probabilità possono essere determinate facendo riferimento alla tabella delle probabilità condizionata di seguito. La probabilità

condizionale di vincere cambiando è  $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$ .

| Auto dietro la porta 3  | Auto dietro la porta 1              |   | Auto dietro la porta 2               |
|---|-------------------------------------|---|--------------------------------------|
| <b>Il giocatore sceglie inizialmente la porta 1</b>   |                                     |   |                                      |
| Il conduttore deve aprire la porta 2  | Il conduttore può aprire la porta 2 | Il conduttore può aprire la porta 3   | Il conduttore deve aprire la porta 3 |
| Probabilità 1/3   | Probabilità 1/6                     | Probabilità 1/6   | Probabilità 1/3                      |
| Se cambi vinci  | Se cambi perdi                      | Se cambi perdi  | Se cambi vinci                       |
| Quando il conduttore apre la porta 2, cambiare ti fa vincere due volte di più che mantenere |                                     | Quando il conduttore apre la porta 3, cambiare ti fa vincere due volte di più che mantenere |                                      |

## VALUTAZIONE

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Mi è piaciuta questa tipologia di lezione.                   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2. Questa lezione è stata interessante.                         | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3. Mi è chiaro quello che dovevo imparare da questa lezione.    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4. L'argomento è stato spiegato in maniera chiara.              | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5. Ho capito l'argomento.                                       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6. Penso di aver partecipato alla lezione in maniera attiva.    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7. In questa lezione sono stato più attivo del solito.          | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8. Ho contribuito in maniera attiva alla qualità della lezione. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9. Mi sono sentito motivato da questa lezione.                  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 10. preferisco le lezioni in cui si fa uso dei visori VR.       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 11. Scrivi due cose che hai apprezzato di questa lezione.       |   |   |   |   |   |
| 12. Scrivi due cose che NON hai apprezzato di questa lezione.   |   |   |   |   |   |

## GUIDA ALL'INCLUSIONE

- **Gli studenti sono uno diverso dall'altro, così come le loro esigenze. Di seguito troverai diversi suggerimenti per poter rendere la lezione di matematica più inclusiva per gli studenti che lottano con disturbi dell'apprendimento.**
- **Quando assegna compiti alla classe, cerca di suddividerli in sotto comandi. Evita doppi comandi in ciascuna istruzione. Ricorda che in caso di operazioni / esercizi con più passaggi, è fondamentale aiutare gli studenti a scomporre i singoli passaggi.**
- **Puoi utilizzare delle forme di controllo per i tuoi studenti, per assicurarti che abbiano completato tutti i passaggi**
- **Assicurati che il carattere, l'interlinea e l'allineamento del documento siano accessibili agli studenti con disturbi dell'apprendimento. Si consiglia di utilizzare un carattere sans serif semplice e con spaziatura uniforme, come Arial e Comic Sans.**

Altre possibili font: Verdana, Tahoma, Century Gothic e Trebuchet. La spaziatura dovrebbe essere 1,5 e si dovrebbe evitare la giustificazione nel testo.

- • Alla fine di ogni attività, dedica del tempo a chiedere agli studenti cosa hanno imparato, per capire meglio il loro processo di apprendimento
- • Assicurati che il materiale che gli studenti hanno a disposizione sia abbastanza „maneggevole“
- • Durante l'utilizzo di supporti diversi (carta, computer e ausili visivi) sceglie uno sfondo diverso dal bianco, che può essere troppo luminoso per gli studenti con disturbi dell'apprendimento. La scelta migliore sarebbe crema o pastello morbido, ma prova a testare colori diversi per saperne di più sulle preferenze degli studenti.
- • Per stimolare la memoria a breve e lungo termine, prepara per tutti gli studenti uno schema che descriva ciò che impareranno in questa lezione, e terminalo con un riassunto di ciò che è stato insegnato. In questo modo rafforzeranno la capacità di ricordare le informazioni.
- **ESEMPIO:**
- **1. Inizia ogni lezione con un breve "CHECK-IN"**
- • Oggi studieremo l'argomento (nome dell'argomento)
- • Vi parlerò di: (nomina 3 parole chiave legate all'argomento)
- • Quindi presenterò gli esercizi: (nomina gli esercizi dal libro o altro testo)
- • Quindi faremo gli esercizi (spiegare il modo in cui lo studente lavorerà: es. Insieme all'insegnante / in coppia / individualmente)
- • Una volta terminati gli esercizi passa al successivo:
- 
- **2. Quindi termina la lezione con un breve "CHECK-OUT"**
- • Durante la lezione abbiamo studiato (argomento della lezione)
- • Le cose più importanti sono state: (nomina 3 parole chiave collegate all'argomento)
- • Siamo stati in grado di fare ... (racconta il lavoro svolto dallo studente durante la lezione)
- • Esploreremo l'argomento la prossima volta quando studieremo (nomina il seguente argomento)

È un piccolo aggiustamento che richiederà 5 minuti della lezione, ma può fare una grande differenza per lo studente. Prova a renderlo una routine abituale.