ΣΕΝΑΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 08:
Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ

Ενότητα: Αριθμητική

Επίπεδο: 14 -15 ετών

Απαιτούμενες γνώσεις: πράξεις με κλάσματα, πράξεις με ρίζες, αριθμητικός μέσος, γεωμετρικός μέσος, αρχικό κεφάλαιο, τελικό κεφάλαιο, απλός τόκος και ανατοκισμός.

Συσχέτιση: Οικονομικά Μαθηματικά, Τέχνη, Αρχιτεκτονική

ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- Υπολογισμός των αριθμητικών και γεωμετρικών μέσων στην πράξη σε συγκεκριμένες καταστάσεις

ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

- Πρακτική Άσκηση
- Διαδραστική Δραστηριότητα
- Ομαδική Εργασία

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΔΙΑ

- αριθμητικά μέσα
- γεωμετρικά μέσα
- ανισότητα
- αρχικό κεφάλαιο
- τελικό κεφάλαιο
- απλός τόκος
- ανατοκισμός

ΥΛΙΚΑ

- μαυροπίνακας
- γεωμετρικά όργανα
- φύλλα εργασίας
- ψαλίδια
- ψηφιακός προβολέας
- φορητός/σταθερός υπολογιστής
- κομπιουτεράκι τσέπης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1 (5 λεπτά)

Ο/η καθηγητής/ρια παρουσιάζει το θέμα του μαθήματος και υπενθυμίζει στους μαθητές τις παρακάτω έννοιες: Η φράση «μέρος όρος» βρίσκεται στις καθημερινές συζητήσεις των ανθρώπων, σε εκφράσεις όπως: «ο μέρος όρος ζωής των ανθρώπων», «ο μέσος όρος ζωής μιας συσκευής», «το μέσο βάρος ενός προϊόντος». Ο μέσος όρος είναι μια συνηθισμένη ή κύρια έννοια πολλών στοιχείων. Προκειμένου ο μέσος όρος να έχει έναν πιο αντικειμενικό χαρακτήρα, είναι απαραίτητο να διαλέγουμε το σωστό είδος μέσου (ο μαθηματικός όρος για τον μέσο όρο). Οι μέσοι που χρησιμοποιούνται περισσότερο είναι: ο αριθμητικός μέσος, ο γεωμετρικός μέσος, ο αρμονικός μέσος, ο τετραγωνικός μέσος.

Ο αριθμητικός μέσος ενός συνόλου n αριθμών $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι το άθροισμα των αριθμών διαιρεμένο με *n*:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Ο γεωμετρικός μέσος ορίζεται ως η νιοστή ρίζα του αποτελέσματος n μη αρνητικών αριθμών. Για ένα σύνολο n μη αρνητικών αριθμών $x_1, x_2, \dots, x_n$ ο γεωμετρικός μέσος εκφράζεται ως: $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2 (15 λεπτά)

Προκειμένου να κατανοήσουμε το πόσο σημαντικό είναι να διαλέγουμε το σωστό είδος μέσου, ο/η καθηγητής/ρια παρουσιάζει την παρακάτω πρακτική άσκηση και υπενθυμίζει τις απαραίτητες έννοιες.

Οι μαθητές χωρίζονται σε τρεις ομάδες: άσπροι, κόκκινοι και μαύροι.

Ο/η καθηγητής/ρια υπενθυμίζει στους μαθητές πως να υπολογίζουν το τελικό κεφάλαιο σε περιπτώσεις απλού τόκου και ανατοκισμού:

Το τελικό κεφάλαιο στην περίπτωση απλού τόκου $C_1 = C_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})$

Το τελικό κεφάλαιο στην περίπτωση ανατοκισμού $C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Ο/η καθηγητής/ρια παρουσιάζει το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί:

Ένας άνθρωπος καταθέτει στην τράπεζα ένα ποσό (αρχικό κεφάλαιο) των 1,000,000 λέϊ κατά την περίοδο 5 χρόνων, με ετήσιο επιτόκιο που μεταβάλλεται ως εξής: 1%, 2%, 4%, 5%, 10%. Θα πρέπει να υπολογίσουμε τον ετήσιο μέσο όρο του επιτοκίου (κατά περίπτωση) και το τελικό κεφάλαιο στο τέλος των 5 χρόνων.

Οι άσπρες ομάδες θα ακολουθήσουν το πιο χρονοβόρο αλλά και το πιο ασφαλές μονοπάτι, υπολογίζοντας το απλό επιτόκιο για κάθε έτος ξεχωριστά. Οι κόκκινες ομάδες θα υπολογίσουν τον μέσο όρο του επιτοκίου χρησιμοποιώντας τον αριθμητικό μέσο και έπειτα θα υπολογίσουν το τελικό κεφάλαιο εφαρμόζοντας τον ανατοκισμό.

Οι μαύρες ομάδες θα υπολογίσουν τον μέσο όρο του επιτοκίου χρησιμοποιώντας τον γεωμετρικό μέσο και έπειτα θα υπολογίσουν το τελικό κεφάλαιο εφαρμόζοντας τον ανατοκισμό.

Οι άσπρες ομάδες υπολογίζουν το τελικό κεφάλαιο που αντιστοιχεί στο κάθε έτος:

Έτος 1: $C_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{P_1}{100}\right)$ = 1000000·1,01 = 1010000 λέϊ

Έτος 2: $C_2 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{P_2}{100}\right)$ = 1010000·1,02 = 1030200 λέϊ

Έτος 3: $C_3 = C_2 \cdot \left(1 + \frac{P_3}{100}\right)$ = 1030200·1,04 = 1071408 λέϊ

Έτος 4: $C_4 = C_3 \cdot \left(1 + \frac{P_4}{100}\right)$ = 1071408·1,05 = 1124978,40 λέϊ

Έτος 5: $C_5 = C_4 \cdot \left(1 + \frac{P_5}{100}\right)$ = 1124978,40·1,10 = 1237476,24 λέϊ.

Οι κόκκινες ομάδες υπολογίζουν:

Ο μέσος συντελεστής $1 + \frac{p}{100} = \frac{1{,}01+1{,}02+1{,}04+1{,}05+1{,}10}{5} =$ 1,044.

Το τελικό κεφάλαιο : $C_5 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^5 = 1000000 \cdot (1{,}044)^5$ = 1240230,745396224 λέϊ.

Οι μαύρες ομάδες υπολογίζουν:

Ο μέσος συντελεστής : $1 + \frac{p}{100} = \sqrt[5]{1{,}01 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}10} = \sqrt[5]{1{,}23747624}$ ≈1,04353585.

Το τελικό κεφάλαιο: $C_5 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^5 \approx 1000000 \cdot (1{,}04353585)^5$ ≈ 1000000·1,23747624 ≈ 1237476,24 λέϊ.

Αφού όλες οι ομάδες παρουσιάσουν τα αποτελέσματα τους, εξάγονται τα συμπεράσματα. Η άσπρη και η μαύρη ομάδα κατέληξαν στο ίδιο αποτέλεσμα, το οποίο είναι και το σωστό. Η κόκκινη ομάδα υπολόγισε 2700 λέϊ παραπάνω. Γιατί; Επειδή χρησιμοποίησαν μια επιπρόσθετη πράξη (αριθμητικός μέσος) στην περίπτωση της πολλαπλασιαστικής διαδικασίας (το τελικό κεφάλαιο στην περίπτωση του ανατοκισμού).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3 (15 λεπτά)

Ο/η καθηγητής/ρια παρουσιάζει την ανισότητα των μέσων.

Για ένα σύνολο n μη αρνητικών αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_n$, χρησιμοποιώντας αριθμητικές παραστάσεις, η ανισότητα ΑΜ–ΓΜ αποδίδεται ως:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Η περίπτωση δυο μη αρνητικών αριθμών a και b, αποτυπώνεται ως

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

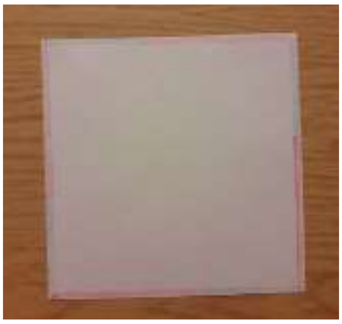
με ισότητα αν και μόνο αν a = b.

Η ανισότητα ΑΜ–ΓΜ αποτελεί μια βασική ανισότητα που χρησιμοποιείται για να αποδείξει άλλες ανισότητες. Παρακάτω δίνεται η οπτική παρουσίαση:

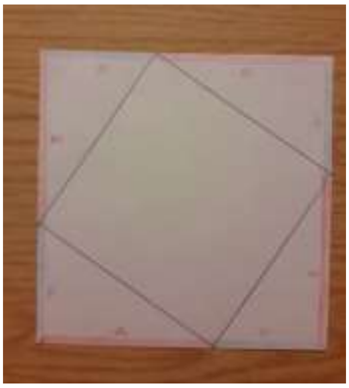
1. Φτιάξτε ένα τετράγωνο με ένα φύλλο χαρτιού



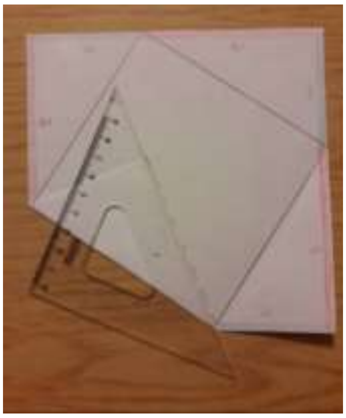
2. Χωρίστε την κάθε πλευρά σε δύο τμήματα με μήκος a και b.



3. Τραβήξτε μια γραμμή από το ένα σημείο έως το άλλο, όπως φαίνεται στις φωτογραφίες:



4. Διπλώστε το φύλλο χαρτί κατά μήκος των τμημάτων που προέκυψαν

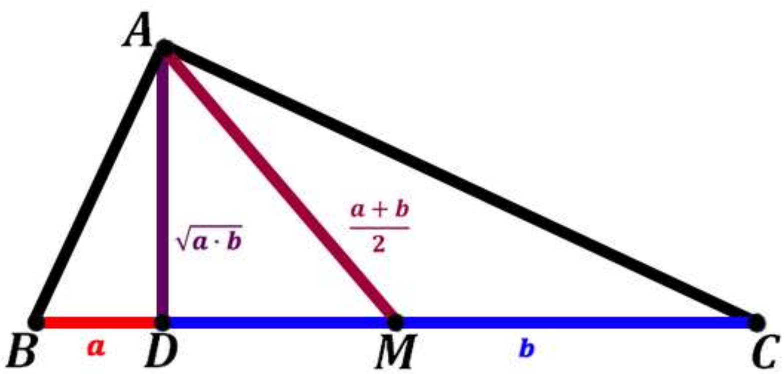


5. Σχεδιάστε μια διακεκομμένη γραμμή κατά μήκος της μακρύτερης πλευράς (του μήκους a στην απεικόνιση).

6. Το μαθηματικό εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά a + b, $(a+b)^2$ είναι 8 φορές μεγαλύτερο από αυτό ενός ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες a και b, το οποίο είναι 8 $\cdot \frac{ab}{2}$. Και βρίσκουμε την ανισότητα μόνο αν a = b.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4 (5 λεπτά) (πραγματοποιείται μόνο εάν απομένουν τουλάχιστον 15 λεπτά για την αξιολόγηση)

Ο/η καθηγητής/ρια παρουσιάζει μια γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας των μέσων:



Σε οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο, το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ο γεωμετρικός μέσος των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα, και η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ο αριθμητικός μέσος των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα. Το μήκος του ύψους είναι μικρότερο ή ίσο με το μήκος της διαμέσου.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Φύλλο Αξιολόγησης

Για όλα τα προβλήματα απαιτούνται ολοκληρωμένες λύσεις. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί κομπιουτεράκι.

(10β) 1. Καθορίστε εάν είναι αληθής η παρακάτω πρόταση:

$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc}, \forall a, b, c \in (0, \infty)$ **(σωστό ή λάθος) και εξηγήστε το γιατί.**

(20β) 2. Υπολογίστε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών: 3, 4, 27, 64. Υπολογίστε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών: 3, 4, 27, 64. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

(15β) 3. Υπολογίστε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών: $3 + \sqrt{8}$ **και** $3 - \sqrt{8}$**.**

(15β) 4. Υπολογίστε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών $3 + \sqrt{8}$ **και** $3 - \sqrt{8}$**.**

(30β) 5. Ένας άνθρωπος καταθέτει στην τράπεζα ένα ποσό (αρχικό κεφάλαιο) των 1000000 λέϊ κατά την περίοδο 3 χρόνων, με ετήσιο επιτόκιο που μεταβάλλεται ως εξής: 1%, 4%, 5%. Υπολογίστε το τελικό κεφάλαιο στο τέλος των 3 χρόνων.

10 βαθμοί δίνονται αυτεπαγγέλτως.

Ο χρόνος εργασίας είναι 15 λεπτά.

Οι απαντήσεις των ασκήσεων:

1. Η πρόταση είναι λάθος. Αν a = b = c, τότε η ανισότητα μετατρέπεται σε ισότητα.

2. $\frac{3+4+27+64}{4} = \frac{98}{4} = 24,5.\ \sqrt[4]{3 \cdot 4 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^4} = 2^2 \cdot 3 = 12.\ AM > GM.$

3. $\frac{(3+\sqrt{8})+(3-\sqrt{8})}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

4. $\sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})} = \sqrt{9-8} = 1$

5. Λύση 1

Υπολογίζουμε το τελικό κεφάλαιο που αντιστοιχεί στο κάθε έτος:

Έτος 1: $C_1 = C_0 \cdot \left(1+\frac{P_1}{100}\right)$ **= 1000000·1,01 = 1010000 λέϊ**

Έτος 2: $C_2 = C_1 \cdot \left(1+\frac{P_2}{100}\right)$ **= 1010000·1,04 = 1050400 λέϊ**

Έτος 3: $C_3 = C_2 \cdot \left(1+\frac{P_3}{100}\right)$ **= 1050400·1,05 = 1102920 λέϊ.**

Λύση 2

Υπολογίζουμε τον μέσο συντελεστή: $1+\frac{p}{100} = \sqrt[3]{1,01 \cdot 1,04 \cdot 1,05} = \sqrt[3]{1,10292} \approx 1,0331927199$.

Υπολογίζουμε το τελικό κεφάλαιο: $C_3 = C_0 \cdot \left(1+\frac{P}{100}\right)^3 \approx 1000000 \cdot (1,0331927199)^3 \approx$ **1000000·1,10292 ≈ 1102920 λέϊ.**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ ΟΛΩΝ

Ο κάθε μαθητής είναι διαφορετικός, όπως και οι ανάγκες του σχετικά με την ύλη. Παρακάτω μπορείτε να βρείτε διάφορες συμβουλές ώστε το μάθημα των μαθηματικών να γίνει πιο ενταξιακό για μαθητές που αντιμετωπίζουν μαθησιακές διαταραχές.

- Όταν δίνετε ασκήσεις στην τάξη, προσπαθήστε να τις χωρίζετε σε μικρά κομμάτια με πληροφορίες. Αποφύγετε τις διπλές ασκήσεις στις οδηγίες. Να θυμάστε ότι στις ασκήσεις/ προβλήματα με πολλαπλά βήματα, είναι σημαντικό να βοηθάτε τους μαθητές να αποδομούν τα βήματα.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μια λίστα ελέγχου για να είτε σίγουροι ότι ολοκλήρωσαν όλα τα βήματα.
- Βεβαιωθείτε πως η γραμματοσειρά, το διάστιχο και η ευθυγράμμιση του αρχείου σας είναι προσβάσιμα για μαθητές με μαθησιακές διαταραχές. Συνιστάται να χρησιμοποιείτε απλές, με ίσα διαστήματα γραμματοσειρές όπως η Arial και η Comic Sans. Άλλες κατάλληλες γραμματοσειρές: Verdana, Tahoma, Century Gothic και Trebuchet. Το διάστιχο πρέπει να είναι 1.5 και προσπαθήστε να αποφύγετε τη στοίχιση στο κείμενο.
- Στο τέλος της κάθε δραστηριότητας, αφιερώστε λίγο χρόνο για να ρωτήσετε τους μαθητές τι έμαθαν για να αποσαφηνίσετε το κάθε βήμα τις μαθησιακής διαδικασίας.
- Βεβαιωθείτε ότι τα υλικά που διαχειρίζονται οι μαθητές είναι εύκολα στην κατανόηση.
- Όταν χρησιμοποιείτε διαφορετικά μέσα (χαρτί, υπολογιστή και ακουστικά βοηθήματα) επιλέξτε για φόντο κάποιο χρώμα εκτός του λευκού, το οποίο μπορεί να είναι πολύ φωτεινό για μαθητές με μαθησιακές διαταραχές. Η καλύτερη επιλογή θα ήταν το μπεζ ή κάποιο απαλό παστέλ χρώμα, ωστόσο προσπαθήστε να δοκιμάσετε διάφορα χρώματα για να δείτε ποιες είναι οι προτιμήσεις των μαθητών.
- Για να ενεργοποιηθεί η βραχυπρόθεσμη και μακροπρόθεσμη μνήμη των μαθητών, ετοιμάστε για την τάξη μια σύνοψη που θα περιγράφει τι θα μάθουν σε αυτό το μάθημα και ολοκληρώστε την με μια περίληψη του τι έχει διδαχθεί. Με αυτόν τον τρόπο, θα ενισχυθεί η ικανότητα τους να αποθηκεύουν πληροφορίες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

1. Ξεκινήστε το κάθε μάθημα με μια σύντομη «ΕΙΣΑΓΩΓΗ»

- Σήμερα, θα μελετήσουμε το θέμα (όνομα του θέματος)
- Θα μιλήσουμε για: (αναφέρετε 3 λέξεις-κλειδιά σχετικά με το θέμα)
- Έπειτα, θα σας δείξω τις ασκήσεις: (αναφέρετε τις ασκήσεις από το βιβλίο των μαθητών)

- **Μετά, θα κάνουμε τις ασκήσεις (εξηγήστε με ποιον τρόπο θα εργαστούν οι μαθητές: πχ. μαζί με τον/την καθηγητή/ρια/ σε ζευγάρια/ ατομικά)**
- **Μόλις ολοκληρωθούν οι ασκήσεις, συνεχίστε το μάθημα**

2. Έπειτα ολοκληρώστε το μάθημα με ένα σύντομο «ΑΠΟΛΟΓΙΣΜΟ»

- **Στη διάρκεια του μαθήματα μάθαμε για (το θέμα του μαθήματος)**
- **Τα πιο σημαντικά πράγματα ήταν: (αναφέρετε 3 λέξεις-κλειδιά σχετικά με το θέμα)**
- **Μπορέσαμε να κάνουμε… (αναφέρετε αυτά με τα οποία ασχολήθηκαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια του μαθήματος)**
- **Θα μελετήσουμε το θέμα την επόμενη φορά όταν θα μάθουμε για (αναφέρετε το επόμενο θέμα)**

Είναι μια μικρή προσαρμογή που θα καταναλώσει 5 λεπτά από το μάθημα αλλά μπορεί να κάνει μεγάλη διαφορά στον τρόπο που θα απομνημονευτεί η ύλη. Προσπαθήστε να το κάνετε ρουτίνα.