

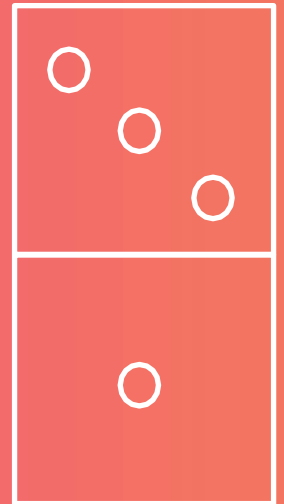
ΣΕΝΑΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 11: ΡΙΞΕ ΤΟ ΖΑΡΙ

Ενότητα: Δεσμευμένη πιθανότητα

Επίπεδο: 14 -16 ετών

Απαιτούμενες γνώσεις: Βασικές έννοιες στατιστικής

Συσχέτιση: Ψυχολογία, Παιχνίδια



ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- Εύρεση της δεσμευμένης πιθανότητας
- Κατανόηση των ψευδώς θετικών αποτελεσμάτων
- Συλλογή δεδομένων
- Οπτικοποίηση της δεσμευμένης πιθανότητας

ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

- Ένα πρακτικό πείραμα που χρησιμοποιεί δενδροειδή διαγράμματα για να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τη φύση των ερωτήσεων στη δεσμευμένη πιθανότητα.
- Προσέγγιση επίλυσης προβλήματος

ΥΛΙΚΑ

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΔΙΑ

- Πιθανότητες
- Ανάλυση δεδομένων
- Ανεξάρτητα και εξαρτημένα γεγονότα
- Δενδροειδές διάγραμμα

- Ένα απλό ζάρι
- Περίπου 7 κόκκινους, 19 μπλε, 22 πράσινους και 11 κίτρινους κύβους ή χρωματιστά κομμάτια χαρτιού ανά ομάδα
- Ένα φύλλο εργασία

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΒΗΜΑ 1: Περιγράψτε και απλοποιήστε το πρόβλημα. Παρέχετε ένα πλάνο για την επίλυση του.

ΕΙΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ (5 λεπτά)

Τι είναι η πιθανότητα; Η πιθανότητα είναι ένα μέτρο που υπολογίζει το ενδεχόμενο να συμβεί ένα γεγονός.

Η κατανόηση της θεωρίας πιθανοτήτων είναι σημαντική στην ιατρική, στην νομική και στην κοινωνία γενικότερα. Σήμερα, θα δουλέψουμε πάνω σε ένα πρόβλημα που δείχνει πως ερμηνεύονται τα στατιστικά σε εξετάσεις π.χ. όταν κάποιος παίρνει τα αποτελέσματα των εξετάσεων για καρκίνο, όταν ελέγχεται ένας αθλητής για παράνομες ουσίες και πολλές άλλες παρόμοιες καταστάσεις που περιλαμβάνουν ψευδώς αρνητικά αποτελέσματα.

Επομένως, η θεωρία πιθανοτήτων μπορεί να είναι πολύ σοβαρή αλλά μπορεί επίσης να δώσει λύσεις σε καθημερινά προβλήματα. Φανταστείτε:

Ένας παραγωγός τροφίμων έχει ένα μεγάλο εργοστάσιο όπου παράγει διαφορετικά είδη φαγητού. Η κάθε γραμμή παραγωγής είναι διαφορετική, επομένως η κέτσαπ και η σοκολάτα με ξηρούς καρπούς παράγονται σε ξεχωριστά κτίρια. Όπως γνωρίζουμε, η αλλεργία στους ξηρούς καρπούς μπορεί να είναι επικίνδυνη για πολλούς ανθρώπους. Η εταιρεία είναι πολύ προσεκτική, επομένως τοποθετεί στις ετικέτες της κέτσαπ την ένδειξη ότι «μπορεί να περιέχει ίχνη ξηρών καρπών» αλλά η επιθεώρηση θα την επισκεφτεί σύντομα. Ο επιθεωρητής είναι πολύ καχύποπτος και γι' αυτό διάλεξε 24 μπουκάλια για εξέταση.

Αλλά ποια είναι η πιθανότητα ότι όντως θα υπάρχουν ξηροί καρποί στο μπουκάλι της κέτσαπ; Υποθέτουμε ότι ένα μέρος των μπουκαλιών θα περιέχει ξηρούς καρπούς και ένα μέρος αυτών θα είναι χωρίς ξηρούς καρπούς, αλλά μερικά από αυτά θα αντιπροσωπεύουν ένα «ψευδώς θετικό», άρα ποια είναι η πιθανότητα ότι ο παραγωγός θα κατηγορηθεί λανθασμένα ότι δεν προσέχει;

ΒΗΜΑ 2: Διεξαγωγή έρευνας και συλλογή δεδομένων

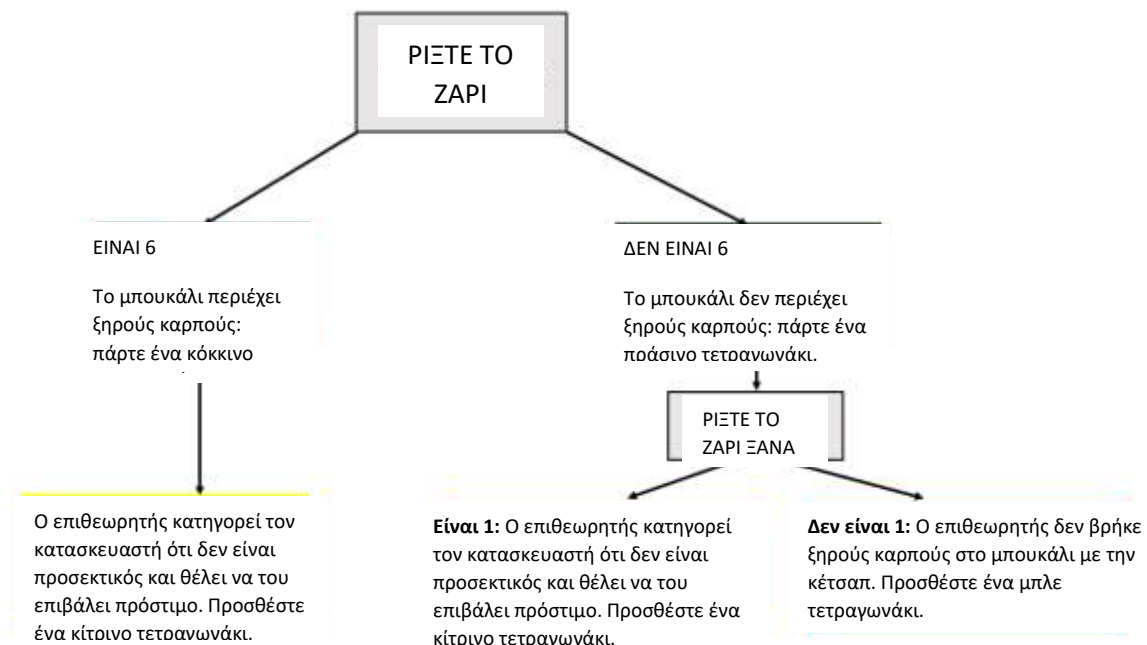
5 λεπτά: Χωρίστε τους μαθητές σε ομάδες των 3 και 4. Η κάθε ομάδα θα χρειαστεί ένα ζάρι με 6 όψεις και κάποια κόκκινα, πράσινα, μπλε και κίτρινα τετραγωνάκια.

Ρίξτε το ζάρι! 6 = Το μπουκάλι περιέχει ξηρούς καρπούς, οτιδήποτε άλλο = το μπουκάλι δεν περιέχει ξηρούς καρπούς.

Εάν το μπουκάλι περιέχει ξηρούς καρπούς, δεν χρειάζεται να ρίξετε ξανά το ζάρι.

Εάν το μπουκάλι είναι χωρίς ξηρούς καρπούς, ρίξτε ξανά το ζάρι: 1 = Είναι ψευδώς θετικό, οτιδήποτε άλλο = είναι αρνητικό

Αρχικά, κάντε μια δοκιμή παρουσίαση ώστε να δουν οι μαθητές πως να διεξάγουν τη δική τους έρευνα.



Ρωτήστε τους μαθητές: μπορείτε να εξηγήσετε τι συμβολίζουν αυτά τα χρώματα;

[κόκκινο=θετικό, πράσινο=αρνητικό, κίτρινο=ύποπτο, έχει πάρει πρόστιμο (θετικό ή ψευδώς θετικό), μπλε = αρνητικό και δεν έχει πάρει πρόστιμο]

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ (10 λεπτά)

Ζητήστε από τους μαθητές να επαναλάβουν το πείραμα 24 φορές (σαν να υπήρχαν 24 μπουκάλια). Η κάθε ομάδα θα πρέπει να καταλήξει με 24 κουτάκια.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ (5 λεπτά)

Ζητήστε από τους μαθητές να συμπληρώσουν τα δεδομένα στα φύλλα εργασίας τους.
Ένα φύλλο εργασίας ανά ομάδα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ (15 λεπτά)

Μετά από αυτό το πείραμα, συγκρίνετε τα αποτελέσματα των πειραμάτων των συμμετεχόντων με τις πραγματικές πιθανότητες και βεβαιωθείτε πως καταλαβαίνουν γιατί υπάρχει απόκλιση. Για αυτό το σκοπό, επανεξετάστε πως υπολογίζονται οι πιθανότητες.

Τα θετικά μπουκάλια: $\frac{1}{6} \cdot 24 = 4$

$$\frac{1 \text{ (μόνο ένας αριθμός (6) δείχνει θετικό)}}{6 \text{ (επιλογές στο ζάρι)}} \cdot 24 \text{ (συνολικός αριθμός μπουκαλιών)} = 4$$

Τα αρνητικά μπουκάλια: $\frac{5}{6} \cdot 24 = 20$

$$\frac{5 \text{ (πέντε αριθμοί (1, 2, 3, 4, 5) δείχνουν αρνητικό)}}{6 \text{ (επιλογές στο ζάρι)}} \cdot 24 \text{ (συνολικός αριθμός μπουκαλιών)} \\ = 20$$

Τα ψευδώς αρνητικά μπουκάλια: $\frac{1}{6} \cdot 20 = 3.\bar{3}$

$$\frac{1 \text{ (μόνο ένας αριθμός (1) δείχνει θετικό)}}{6 \text{ (επιλογές στο ζάρι)}} \cdot 20 \text{ (συνολικός αριθμός μπουκαλιών)} = 3.\bar{3}$$

Τα πραγματικά αρνητικά μπουκάλια: $\frac{5}{6} \cdot 20 = 16.\bar{6}$

$$\frac{5 \text{ (πέντε αριθμοί (2, 3, 4, 5, 6) δείχνουν αρνητικό)}}{6 \text{ (επιλογές στο ζάρι)}} \cdot 20 \text{ (συνολικός αριθμός μπουκαλιών)} \\ = 16.\bar{6}$$

Για να το πάμε λίγο παρακάτω, μπορείτε επίσης να παρουσιάσετε τον παρακάτω τύπο ψευδώς θετικών τιμών ώστε να ελέγξετε αν τα αποτελέσματα που υπολογίσατε είναι σωστά και να επιβεβαιώσετε πως οι μαθητές σας κατανοούν την έννοια των ψευδώς θετικών:

$$\frac{FP}{N} = \frac{FP}{FP + TN}$$

FP = αριθμός των ψευδώς θετικών

TN = αριθμός των πραγματικά αρνητικών

N = σύνολο αρνητικών αριθμών

FP Ψευδώς θετικά = Αριθμός των κίτρινων καρτών/κύβων – αριθμός των κόκκινων καρτών/κύβων

TN Πραγματικά αρνητικά = Αριθμός των μπλε καρτών/κύβων

N Αρνητικά = Αριθμός των πράσινων καρτών/κύβων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ (10 λεπτά)

Συζητήστε με τους μαθητές σας:

- Ποιες ήταν οι προσδοκίες σας προτού ξεκινήσετε το πείραμα; Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά των συμμαθητών σας. Ποιος έπεσε πιο κοντά στις πραγματικές πιθανότητες που μόλις υπολογίσαμε;
- Ποιες είναι οι πιθανότητες ο παραγωγός να λάβει πρόστιμο για ένα μπουκάλι που στην πραγματικότητα δεν περιείχε ξηρούς καρπούς;
- Ποια είναι τα πλεονεκτήματα του δενδροειδούς διαγράμματος; Τι θα λέγατε για τον πίνακα διπλής εισόδου; Ποιες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε εύκολα από το καθένα και τι είναι δυσκολότερο ή αδύνατο να βρείτε; Ποιο μέρος αυτής της άσκησης θεωρήσατε δύσκολο;

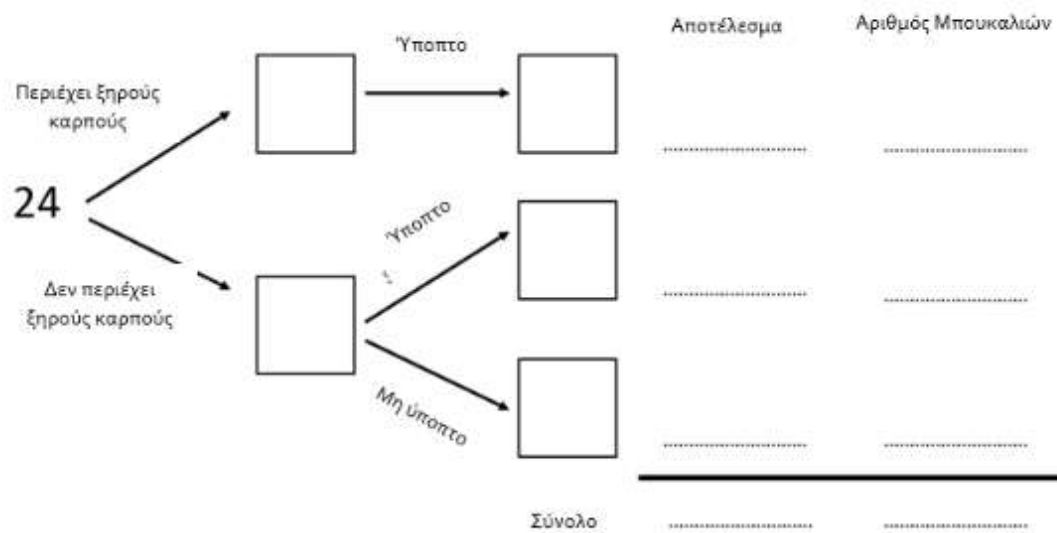
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΤΕ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ ΔΙΠΛΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΚΑΙ ΤΟ ΔΕΝΔΡΟΕΙΔΕΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΜΕ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΩΝ 24 ΜΠΟΥΚΑΛΙΩΝ ΚΕΤΣΑΠ.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΙΠΛΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ

Πίνακας διπλής Εισόδου		Θεωρεί ο επιθεωρητής ύποπτο το μπουκάλι και θέλει να δώσει πρόστιμο:		
		Πολύ ύποπτο – θέλει να δώσει πρόστιμο	Δεν το θεώρησε ύποπτο – όχι πρόστιμο	ΣΥΝΟΛΟ
Είναι το μπουκάλι κάποια χωρίς ξηρούς καρπούς	Χωρίς ξηρούς καρπούς			
	Περιέχει ξηρούς καρπούς			
ΣΥΝΟΛΟ				

ΔΕΝΔΡΟΕΙΔΕΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



Απαντήσεις:

Οι απαντήσεις παρακάτω είναι τα διαφορετικά αποτελέσματα του πειράματος. Ο πρώτος και ο τρίτος πίνακας δείχνουν τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν ενώ ο δεύτερος δείχνει ένα πιθανό αποτέλεσμα όταν διεξάγει κανείς το πείραμα με ζάρι ακολουθώντας τις παραπάνω οδηγίες. Οι αριθμοί φυσικά θα διαφοροποιούνται καθώς το 24 είναι μικρό μέγεθος δείγματος για την επίτευξη ακριβών αποτελεσμάτων.

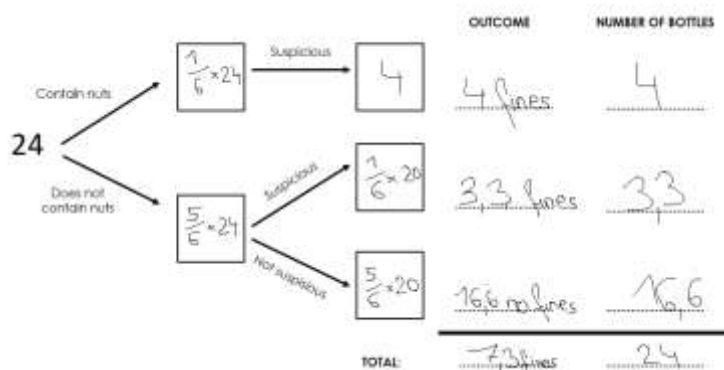
ΠΙΝΑΚΑΣ 2 ΕΙΣΟΔΩΝ: Υπολογισμένα αποτελέσματα

2 way table		Does the inspector find the bottle suspicious and want to give a fine?		TOTAL
		Very suspicious of the bottle – want to give fine	Did not find the bottle suspicious – no fine	
It the ketchup bottle nut free?	Nut free	3,3	16,6	20
	Contains nuts	4		4
TOTAL		7,3	16,6	24

ΠΙΝΑΚΑΣ 2 ΕΙΣΟΔΩΝ: Πιθανά αποτελέσματα του πειράματος

2 way table		Does the inspector find the bottle suspicious and want to give a fine?		TOTAL
		Very suspicious of the bottle – want to give fine	Did not find the bottle suspicious – no fine	
It the ketchup bottle nut free?	Nut free	5	13	18
	Contains nuts	6		6
TOTAL		11	13	24

ΔΕΝΔΡΟΕΙΔΕΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ: Υπολογισμένα αποτελέσματα



ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Εξηγήστε τι σημαίνει το «ψευδώς θετικό»!

Γιατί τα αποτελέσματα του πειράματος
διέφεραν από τα υπολογισμένα
αποτελέσματα;

Τι θα άλλαζε όσον αφορά τις πιθανότητες
αν το ζάρι είχε 8 πλευρές;

1. Εξηγήστε τι σημαίνει το «ψευδώς θετικό»!

Ψευδώς θετικό σημαίνει ότι δίνεται ένα θετικό αποτέλεσμα όταν η αληθινή τιμή είναι αρνητική. Στην περίπτωσή μας, σημαίνει ότι κάποια ύποπτα μπουκάλια (αριθμός των «κίτρινων» - αριθμός των «κόκκινων») δεν περιέχουν στην πραγματικότητα ξηρούς καρπούς, ωστόσο εφόσον η δεύτερη γύρα της επιθεώρησης (δεύτερο ρίξιμο του ζαριού) δείχνει ότι έχουν, ο παραγωγός θα λάβει πρόστιμο για αυτά, αν και δεν περιέχουν ξηρούς καρπούς.

2. Γιατί τα αποτελέσματα του πειράματος διέφεραν από τα υπολογισμένα αποτελέσματα;

Το 24 είναι αρκετά μικρό μέγεθος δείγματος για την επίτευξη ακριβών αποτελεσμάτων.

3. Τι θα άλλαζε όσον αφορά τις πιθανότητες αν το ζάρι είχε 8 πλευρές;

Θα υπήρχαν λιγότερα ψευδώς θετικά καθώς η πιθανότητα θα μειωνόταν στο $1/8$ από το $1/6$.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ ΟΛΩΝ

Η οπτική υποστήριξη είναι ωφέλιμη για όλους τους μαθητές: ο καθηγητής μπορεί να σχεδιάσει ένα διάγραμμα με το ζάρι στον πίνακα ώστε οι μαθητές να το κοιτούν ενώ διεξάγουν το πείραμα. Επίσης, ενθαρρύνετε τους μαθητές να απεικονίζουν τα προβλήματα αν κάτι τέτοιο τους βοηθά, π.χ. χάρτης μυαλού.

- Χωρίστε τις οδηγίες σε διαδοχικά βήματα. Είναι προτιμότερο να παρουσιάζεται τις οδηγίες τόσο σε γραπτή όσο και σε προφορική μορφή.
- Βεβαιωθείτε ότι οι μαθητές κατανοούν τις έννοιες, ζητήστε από τους μαθητές να επαναλάβουν τις οδηγίες. Βεβαιωθείτε πως οι μαθητές νιώθουν άνετα να διατυπώνουν ερωτήσεις.
- Εξουσιοδοτήστε βοηθητική και υποστηρικτική τεχνολογία για τους μαθητές που τη χρειάζονται.
- Βεβαιωθείτε ότι η γραμματοσειρά, το διάστιχο και η στοίχιση είναι προσβάσιμα για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες.
- Ζητήστε από τους μαθητές να ερμηνεύσουν το πρόβλημα ώστε να αναπτύξουν τις δικές τους αναλυτικές δεξιότητες.
- Ζητήστε συνεχή ανατροφοδότηση προκειμένου να προσαρμόσετε τις ασκήσεις. Κάποιοι μαθητές ίσως χρειαστούν περισσότερο χρόνο από άλλους. Επίσης, παρέχετε τα απαιτούμενα υλικά νωρίτερα, ώστε να μη χαθεί χρόνος για την αναζήτηση και τη συγκέντρωσή τους.
- Προσφέρετε θέσεις μακριά από φασαρία και περισπασμούς για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, ειδικά τους ΔΕΠΥ.
- Παρακινήστε τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα λεξικό μαθηματικών, με τις έννοιες να αποσαφηνίζονται με το δικό τους τρόπο, μέσω λέξεων, εικόνων, μητρικής γλώσσας κ.λπ.
- Βοηθήστε τους μαθητές να καταλάβουν τη σύνδεση αυτής της άσκησης με προβλήματα της αληθινής ζωής και την αξία των πιθανοτήτων στην καθημερινότητα, κάνοντας την έτσι πιο προσιτή.
- Να θυμάστε ότι κάποιοι μαθητές πιθανώς να δυσκολεύονται να εξηγήσουν τη διαδικασία που ακολούθησαν για να βρουν τις απαντήσεις, εγκαθιδρύστε ένα ασφαλές και ενταξιακό περιβάλλον για αυτούς τους μαθητές ώστε να μειωθεί το άγχος τους. Ο κάθε μαθητής θα πρέπει να μπορεί να βρει τη δική του νοητική στρατηγική για την επίλυση των προβλημάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

1. Ξεκινήστε το κάθε μάθημα με μια σύντομη «ΕΙΣΑΓΩΓΗ»

- Σήμερα, θα μελετήσουμε το θέμα (όνομα του θέματος)
- Θα μιλήσουμε για: (αναφέρετε 3 λέξεις-κλειδιά σχετικά με το θέμα)
- Έπειτα, θα σας δείξω τις ασκήσεις: (αναφέρετε τις ασκήσεις από το βιβλίο των μαθητών)
- Μετά, θα κάνουμε τις ασκήσεις (εξηγήστε με ποιον τρόπο θα εργαστούν οι μαθητές: πχ. μαζί με τον/την καθηγητή/ρια/ σε ζευγάρια/ ατομικά)
- Μόλις ολοκληρωθούν οι ασκήσεις, συνεχίστε το μάθημα

2. Έπειτα ολοκληρώστε το μάθημα με ένα σύντομο «ΑΠΟΛΟΓΙΣΜΟ»

- Στη διάρκεια του μαθήματος μάθαμε για (το θέμα του μαθήματος)
- Τα πιο σημαντικά πράγματα ήταν: (αναφέρετε 3 λέξεις-κλειδιά σχετικά με το θέμα)
- Μπορέσαμε να κάνουμε... (αναφέρετε αυτά με τα οποία ασχολήθηκαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια του μαθήματος)
- Θα μελετήσουμε το θέμα την επόμενη φορά όταν θα μάθουμε για (αναφέρετε το επόμενο θέμα)

Είναι μια μικρή προσαρμογή που θα καταναλώσει 5 λεπτά από το μάθημα αλλά μπορεί να κάνει μεγάλη διαφορά στον τρόπο που θα απομνημονευτεί η ύλη. Προσπαθήστε να το κάνετε ρουτίνα.