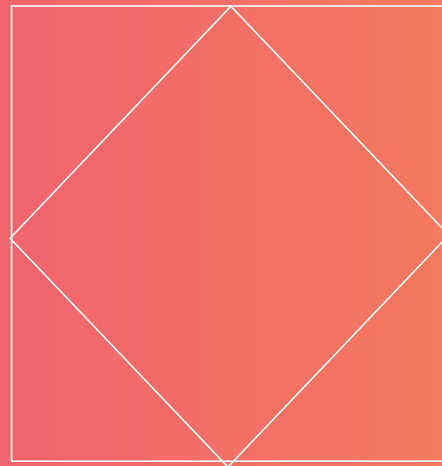


SCENARIJ POUČAVANJA 08: NEJEDNAKOST IZMEĐU ARITMETIČKE I GEOMETRIJSKE SREDINE



Tema: Brojevi

Razina: 14 -15 godina

Predznanje: računske operacije s razlomcima, aritmetička sredina, geometrijska sredina, početni ulog, konačni ulog, jednostavne i složene kamate

Korelacija: Financijska matematika, umjetnost, arhitektura

Vrijeme: 50 minuta

ISHODI UČENJA

- Učenik će primijeniti aritmetičku i geometrijsku sredinu u praktičnim, konkretnim situacijama

NASTAVNE METODE

- Praktičan rad
- Rad u paru

KLJUČNE RIJEČI

- Aritmetička sredina
- Geometrijska sredina
- Nejednakost
- Početni kapital
- Konačni kapital
- Jednostavne kamate
- Složene kamate

POTREBAN PRIBOR

- Ploča
- Geometrijski pribor
- Radni listovi
- Škare
- Projektor
- Prijenosno računalo
- Kalkulator

AKTIVNOSTI

AKTIVNOST 1 (5 min)

Nastavnik predstavlja temu lekcije i podsjeća učenike na značenje sljedećih pojmova:

Riječ „prosječan/srednji“ pronalazimo u svakodnevnom govoru, u izrazima poput:

"prosječan vijek ljudskog života", "prosječan vijek trajanja uređaja", "prosječna težina proizvoda". Prosjek je srednja vrijednost skupa podataka. Kako bi prosječna vrijednost bila objektivna, potrebno je odabrati odgovarajući tip sredine (matematički naziv za prosjek). Najčešće korištene sredine su: aritmetička sredina, geometrijska sredina, harmonijska sredina, kvadratna sredina.

Aritmetička sredina niza brojeva x_1, x_2, \dots, x_n je zbroj tih brojeva podijeljen s n :

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Geometrijska sredina je definirana kao n -ti korijen umnoška svi n pozitivnih realnih brojeva. Za skup pozitivnih realnih brojeva x_1, x_2, \dots, x_n , geometrijska sredina jest broj:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

AKTIVNOST 2 (15 min)

Kako bi učenici shvatili važnost odabira pravog tipa sredine, nastavnik predstavlja slijedeću aktivnost i podsjeća na važne pojmove.

Učenici su podijeljeni u parove u 3 tima: bijeli, crveni i crni .

Nastavnik podsjeća učenike kako izračunati konačnu vrijednost uloga u slučaju jednostavnih i složenih kamata:

- Konačna vrijednost uloga kod jednostavnog kamatnog računa $C_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$
- Konačna vrijednost uloga kod složenog kamatnog računa $C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Nastavnik postavlja problem koji treba riješiti:

Osoba položi u banku iznos od 1 000 000 (početni ulog) na vremensko razdoblje od 5 godina, uz godišnje kamatne stope koje se razlikuju redosljedom: 1%, 2%, 4%, 5%, 10%. Potrebno je izračunati prosječnu godišnju kamatnu stopu (ako je primjenjivo) i konačnu vrijednost uloga nakon 5 godina.

Bijeli tim će koristiti duži, ali sigurniji put računajući jednostavne kamatne stope za svaku godinu. Crveni tim će računati prosječnu kamatnu stopu koristeći aritmetičku sredinu, a zatim će računati konačnu vrijednost uloga koristeći složeni kamatni račun.

Crni tim će računati prosječnu kamatnu stopu koristeći geometrijsku sredinu, a zatim će računati konačnu vrijednost uloga koristeći složeni kamatni račun.

Bijeli tim računa konačnu vrijednost uloga za svaku godinu:

$$1.\text{godina: } C_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) = 1000000 \cdot 1.01 = 1010000 \text{ kn}$$

$$2.\text{godina: } C_2 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) = 1010000 \cdot 1.02 = 1030200 \text{ kn}$$

$$3.\text{godina: } C_3 = C_2 \cdot \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) = 1030200 \cdot 1.04 = 1071408 \text{ kn}$$

$$4.\text{godina: } C_4 = C_3 \cdot \left(1 + \frac{p_4}{100}\right) = 1071408 \cdot 1.05 = 1124978.40 \text{ kn}$$

$$5.\text{godina: } C_5 = C_4 \cdot \left(1 + \frac{p_5}{100}\right) = 1124978.40 \cdot 1.10 = 1237476.24 \text{ kn}$$

Crveni tim računa:

$$\text{Prosječni kamatni koeficijent } \frac{1.01+1.02+1.04+1.05+1.10}{5} = 1.044.$$

$$\text{Konačnu vrijednost uloga : } C_5 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 = 1000000 \cdot (1.044)^5 = 1240230.745396224 \text{ kn.}$$

Crni tim računa:

$$\text{Prosječni kamatni koeficijent : } \sqrt[5]{1.01 \cdot 1.02 \cdot 1.04 \cdot 1.05 \cdot 1.10} = \sqrt[5]{1.23747624} \approx 1.04353585.$$

$$\text{Konačnu vrijednost uloga: } C_5 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 \approx 1000000 \cdot (1.04353585)^5 \approx 1000000 \cdot 1.23747624 \approx 1237476.24 \text{ kn.}$$

Nakon što svaki tim predstavi svoje rezultate, izvode se zaključci. Bijeli i crni tim su došli do istog rezultata, onog ispravnog. Rezultat crvenog tima je veći za dodatnih 2700 kn. Zašto?

Dobiveni prosječni kamatni koeficijent veći je kad se računa kao aritmetička sredina pojedinih koeficijenata nego kad se računa kao geometrijska sredina pojedinih koeficijenata.

AKTIVNOST 3 (15 min)

Nastavnik predstavlja nejednakost sredina između aritmetičke i geometrijske sredine.

Za skup n pozitivnih realnih brojeva x_1, x_2, \dots, x_n , koristeći matematički zapis, A–G, nejednakost je dana izrazom:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n},$$

Pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

U slučaju dva pozitivna realna broja a i b vrijedi:

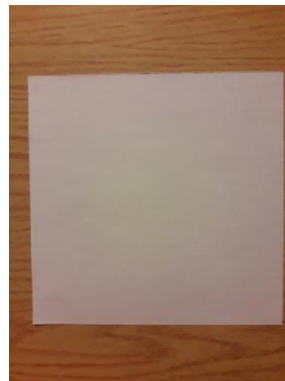
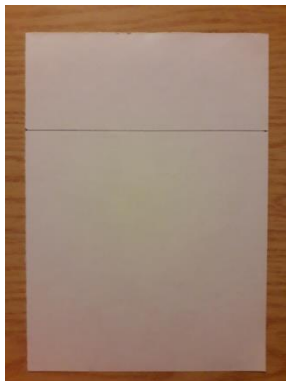
$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

s jednakošću samo u slučaju $a = b$.

AM–GM nejednakost je osnovna nejednakost koja se koristi u dokazivanju ostalih nejednakosti.

U nastavku se nalazi vizualna demonstracija:

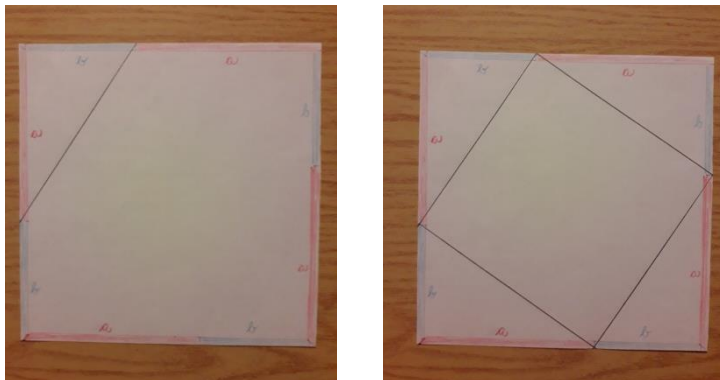
1. Izreži kvadrat iz lista papira.



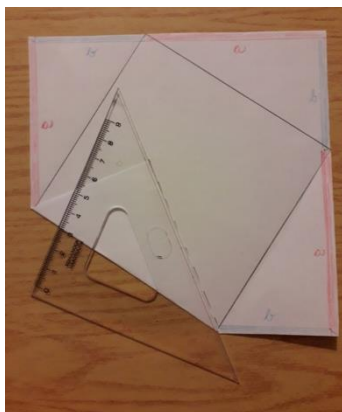
2. Podijeli svaku stranicu kvadrata na dva dijela s duljinama a i b . Označi točke koje dijele stranice kvadrata.



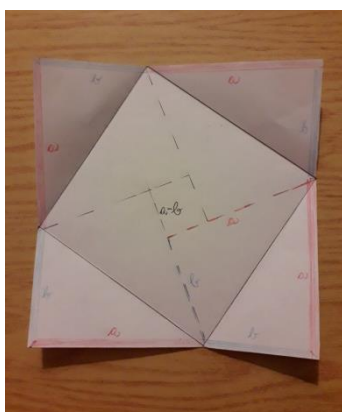
3. Nacrtaj dužine koje spajaju točke na susjednim stranicama kvadrata, kao što je prikazano na slici:



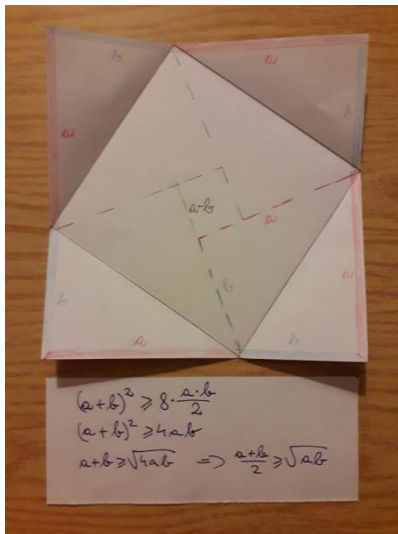
4. Preklopi rub papira duž dobivenih dužina.



5. Nacrtaj isprekidanu crtu uz dužu stranu ruba preklopljenog papira (duljina a u našoj ilustraciji).

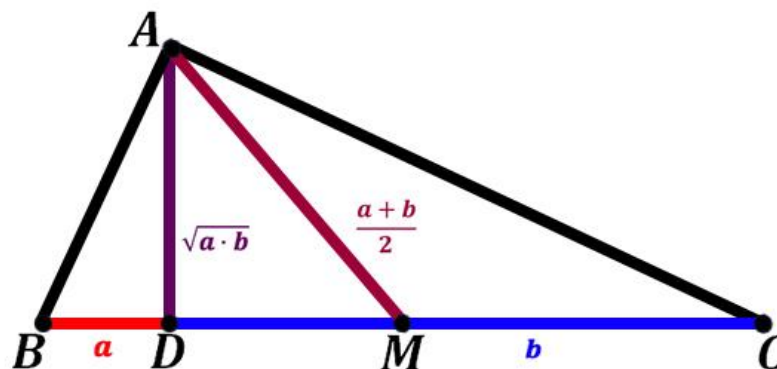


6. Površina kvadrata sa stranicama duljina $a + b$, je veća od površine 8 pravokutnih trokuta s katetama a i b : $(a + b)^2 > 8 \frac{ab}{2}$. Jednakost površina se dobije samo u slučaju $a = b$.



AKTIVNOST 4 (5 min - izvodi se samo ako za evaluaciju ostane najmanje 15 min)

Nastavnik pokazuje geometrijsku interpretaciju A-G nejednakosti:



U svakom pravokutnom trokutu duljina visine na hipotenuzu jednaka je geometrijskoj sredini duljina odsječaka na hipotenuzu dobivenih projekcijom kateta na hipotenuzu, a duljina težišnice na hipotenuzu jednaka je aritmetičkoj sredini projekcija kateta na hipotenuzu. Duljina visine je manja ili jednaka duljini odgovarajuće težišnice.

EVALUACIJA (15 min)

U svim zadacima potreban je detaljan postupak rješenja zadataka. Dozvoljena je upotreba džepnog računala.

1. U sljedećoj rečenici provjeri istinitost matematičke tvrdnje

$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc}, \forall a, b, c \in (0, \infty)$. Je li tvrdnja točna ili pogrešna? Objasni svoj odabir.

2. Izračunaj aritmetičku sredinu brojeva 3, 4, 27, 64. Izračunaj geometrijsku sredinu brojeva: 3, 4, 27, 64. Usporedi dobivene rezultate.

3. Izračunaj aritmetičku sredinu brojeva $3 + \sqrt{8}$ i $3 - \sqrt{8}$.

4. Izračunaj geometrijsku sredinu brojeva $3 + \sqrt{8}$ i $3 - \sqrt{8}$.

5. Osoba je uložila u banku iznos od 1000000 kn (početni ulog) na razdoblje od 3 godine, uz godišnje kamatne stope koje se razlikuju redom: 1%, 4%, 5%. Izračunajte konačan iznos uloga na kraju treće godine.

Rješenja zadataka:

1. Tvrdnja je pogrešna. Ako je $a = b = c$, nejednakost postaje jednakost.

$$2. \frac{3 + 4 + 27 + 64}{4} = \frac{98}{4} = 24,5. \sqrt[4]{3 \cdot 4 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^4} = 2^2 \cdot 3 = 12. AM > GM.$$

$$3. \frac{(3 + \sqrt{8}) + (3 - \sqrt{8})}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$4. \sqrt{(3 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{8})} = \sqrt{9 - 8} = 1.$$

5.

Rješenje (1)

Izračunamo konačnu vrijednost uloga za svaku pojedinu godinu:

$$1.\text{godina: } C_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) = 1000000 \cdot 1.01 = 1010000 \text{ kn}$$

$$2.\text{godina: } C_2 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) = 1010000 \cdot 1.04 = 1050400 \text{ kn}$$

$$3.\text{godina: } C_3 = C_2 \cdot \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) = 1050400 \cdot 1.05 = 1102920 \text{ kn.}$$

Rješenje (2)

Izračunamo prosječni kamatni koeficijent: $\sqrt[3]{1.01 \cdot 1.04 \cdot 1.05} = \sqrt[3]{1.10292} \approx 1.0331927199$.

Konačna vrijednost uloga: $C_3 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \approx 1000000 \cdot (1.0331927199)^3 \approx 1000000 \cdot 1.10292 \approx 1102920 \text{ kn.}$

SMJERNICE ZA PRILAGODBU POUČAVANJA

Svaki se učenik razlikuje i njihove potrebe za usvajanje ishoda mogu se razlikovati. U nastavku je nekoliko savjeta kako prilagoditi ostvarivanje ishoda učenicima s teškoćama u učenju.

- Kada dajete zadatke učenicima, pokušajte ih podijeliti na manje dijelove. Izbjegavajte dvostruke zadatke u uputama. Imajte na umu da je u slučaju operacija/vježbi s više koraka potrebno pomoći učenicima u pojedinim koracima.
- Možete koristiti liste za provjeru svakog pojedinog koraka učenika kako biste bili sigurni da su učinili sve korake.
- Pazite da font, razmak između redova i poravnanje vašeg dokumenta budu primjereni učenicima s teškoćama u učenju. Preporučuje se upotreba običnog, ravnomjerno raspoređenog sans serif fonta, kao što su Arial i Comic Sans. Ostali: Verdana, Tahoma, Century Gothic i Trebuchet. Razmak bi trebao biti 1,5 i pokušajte izbjeći obostrano poravnanje u tekstu.
- Na kraju svake aktivnosti odvojite malo vremena i pitajte učenike što su naučili i ponovite svaki korak u njihovom procesu učenja.
- Provjerite je li materijal dovoljno jednostavan učenicima za korištenje.
- Dok koristite različite medije (papir, računala i vizualna pomagala), odaberite pozadinu koja nije bijela jer učenicima s poremećajima učenja ona može biti svijetla. Najbolji izbor bi bila krem ili nježna pastelna boja, ali pokušajte testirati različite boje kako biste saznali više o preferencijama učenika.
- Da biste potaknuli kratkotrajno i dugoročno pamćenje, pripremite za sve učenike u učionici upute koje opisuju što će naučiti u ovoj lekciji i završite je rezimeom naučenog. Na taj će način ojačati sposobnost pamćenja informacija.

PRIMJER:

1. Svaku lekciju započnite kratkim „ulaznim“ informacijama

- Danas ćemo proučavati temu (naziv teme)
- Reći ću vam: (navedite 3 ključne riječi povezane s temom)
- Zatim ću predstaviti vježbe: (imenovati vježbe)
- Zatim ćemo raditi vježbe (objasniti način rada učenika: npr. zajedno s učiteljem / u parovima / pojedinačno)
- Kad provedemo vježbe [Nastaviti]

2. Zatim završite lekciju kratkim "izlaznim" informacijama

- Na temelju dane nastavne jedinice moći ćemo (tema lekcije)
- Najvažniji ishodi: (imenovati 3 ključne riječi povezane s temom)

- **Možemo...** (ispričati o radu učenika tijekom predavanja)
- **Primijenit ćemo ostvarene ishode sljedeći put kada ćemo učiti o (imenovati sljedeću temu).**

Napomene vezane uz prilagodbu oduzet će 5 minuta u realizaciji nastavne podteme, ali mogu napraviti veliki pomak u načinu na koji će se usvojiti ishodi. Pokušajte ovo usvojiti kao rutinu u radu.