



SCENARIJ POUČAVANJA 06: MONTY HALL PROBLEM

Tema: Uvjetna vjerojatnost

Razina: 15 – 18 godina

Predznanje: Događaji

Korelacija: Statistika, financije, kockanje, umjetna inteligencija, informatika, teorija igara

Vrijeme: 60 minuta

ISHODI UČENJA

- Primijeniti teoriju vjerojatnosti
- Primijeniti uvjetnu vjerojatnost

NASTAVNE METODE

- Upotreba VR tehnologije
- Individualni rad i rad u paru

KLJUČNE RIJEČI

- Teorija vjerojatnosti
- događaj
- uvjetna vjerojatnost
- Monty Hall problem

POTREBAN PRIBOR

- VR naočale
- ploča
- prijenosno računalo, džepno računalo, projektor

AKTIVNOSTI

UVOD: PRAVILA PONAŠANJA KOD UPOTREBE VR-a U UČIONICI (5 min)



AKTIVNOST 1 (5-10 min) UVOD U LEKCIJU

Oblik rada: frontalni

Potreban pribor: ploča ili pripremljena PowerPoint prezentacija

Nastavnik najavljuje i prezentira temu lekcije: Uvjetna vjerojatnost

Predznanje: slučajni eksperiment, uzorak, događaj, elementarni događaj, siguran događaj, nemoguć događaj, međusobno isključivi događaji, suprotni događaj, vjerojatnost događaja, jednako vjerojatni događaji.

Teorem. Ako je E – prostor svih mogućih ishoda slučajnog eksperimenta, konačan i svi elementarni događaji su jednako vjerojatni, tada je vjerojatnost ostvarivanja bilo kojeg događaja A , vezanog za promatrani eksperiment

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih ishoda za } A}{\text{broj svih mogućih ishoda}}$$

Teorem. Neka je E – prostor svih mogućih ishoda slučajnog eksperimenta, konačan i neprazan, a A i B – događaji u promatranom eksperimentu. Tada:

i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ako su A, B disjunktni, tj nesuglasni;

ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, ako A i B nisu disjunktni;

iii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, gdje je \bar{A} suprotan događaj događaju A .

AKTIVNOST 2 (20 min) UVJETNA VJEROJATNOST

Oblik rada: frontalni

Potreban pribor: ploča ili pripremljena PowerPoint prezentacija

Nastavnik predstavlja ishode nove lekcije, a to je procjena vjerojatnosti ostvarivanja događaja uz uvjet da se ostvario neki drugi događaj.

Problem 1.

U kutiji se nalazi 5 bijelih i 9 crnih kuglica. Slučajno izvlačimo dvije kuglice, bez da ih vraćamo u kutiju. Promatramo sljedeće događaje:

A: „prva izvučena kuglica je crna”;

B: „prva izvučena kuglica je bijela”;

C: „druga izvučena kuglica je bijela”.

a) Kolika je vjerojatnost ostvarivanja događaja A?

b) Kolika je vjerojatnost ostvarivanja događaja C uz uvjet da se ostvario događaj A?

c) Kolika je vjerojatnost ostvarivanja događaja C uz uvjet da se ostvario događaj B?

Rješenje.

$$a) P(A) = \frac{\text{broj povoljnih ishoda za A}}{\text{broj svih mogućih ishoda}}$$

broj svih mogućih ishoda je $5 + 9 = 14$

broj povoljnih ishoda za događaj A je 9, dakle $P(A) = \frac{9}{14}$.

b) Nakon ostvarivanja događaja A, u kutiji je ostalo 5 bijelih i 8 crnih kuglica, dakle

$$P(C) = \frac{5}{13}.$$

c) Nakon ostvarivanja događaja B, u kutiji su ostale 4 bijele i 9 crnih kuglica, dakle

$$P(C) = \frac{4}{13}.$$

Definicija. Neka su događaji $A, B \in \mathcal{P}(E)$ i $P(A) > 0$.

Uvjetna vjerojatnost događaja B uz uvjet da se ostvario događaj A je $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Iz formule uvjetne vjerojatnosti dobivamo da je $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$, dakle vjerojatnost ostvarivanja oba događaja A i B jednaka je umnošku vjerojatnosti događaja A i uvjetne vjerojatnosti događaja B uz uvjet A.

Problem 2.

U kutiji se nalazi 5 bijelih i 9 crnih kuglica. Slučajno izvlačimo dvije kuglice, bez da ih vraćamo u kutiju. Kolika je vjerojatnost da je prva izvučena kuglica crna i druga izvučena kuglica bijela?

Rješenje.

Promatramo događaje:

A: „prva izvučena kuglica je crna“;

B: „druga izvučena kuglica je bijela“.

Dobivamo $P(A) = \frac{9}{14}$ i $P(B|A) = \frac{5}{13}$

Tako je $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{182}$.

Problem 3.

Istodobno bacamo dvije kocke različitih boja. Promatramo sljedeće događaje:

A: „broj na prvoj kocki je manji od broja dobivenog na drugoj kocki“;

B: „zbroj brojeva dobivenih na obje kocke je manji ili jednak 5“.

Kolika je uvjetna vjerojatnost ostvarivanja događaja B uz uvjet da se ostvario događaj A?

Rješenje.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Budući da su kocke različitih boja, broj mogućih slučajeva je $6 \cdot 6 = 36$.

A

$$= \left\{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6) \right\}$$

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$A \cap B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$$

$$\text{Dakle, } P(A) = \frac{15}{36}, P(B) = \frac{10}{36}, P(A \cap B) = \frac{4}{36} \text{ pa je } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{4}{15}.$$

AKTIVNOST 3 (15 min) UVJETNA VJEROJATNOST UZ PRIMJENU VR naočala

Nastavnik daje učenicima zadatke.

Učenici:

- pronalaze i odabiru vježbu MONTY HALL PROBLEM na polici s vježbama
- rješavaju zadatke u VR aplikaciji

Oblik rada: rad u paru

Potreban pribor: VR naočale

TIJEK AKTIVNOSTI:

Nastavnik dijeli učenike u parove.

Nastavnik predstavlja učenicima Monty Hall problem.

Što je Monty Hall problem?

Poznat i kao *Monty Hall paradox*, *problem s troja vrata*, *problem kvizaša* i *problem automobila i koza*, predstavio ga je bio-statičar Steve Selvin (1975) u pismu časopisu *The American Statistician*. Ovisno o pretpostavkama, može se smatrati matematički identičnim problemu trojice zatvorenika Martina Gardnera (1959). Nazvan je prema imenu stvarnog kvizaša Montyja Halperina iz dugogodišnje TV emisije "Let's make a Deal". To je poznati problem koji ima neočekivano rješenje u koje mnogi ne vjeruju.

Problem je postao svjetski poznat 1990. godine predstavljanjem u popularnoj tjednoj kolumni "Pitaj Marilyn" u časopisu Parade. Autorica Marilyn vos Savant, prema tadašnjoj Guinnessovoj knjizi rekorda, bila je osoba s najvišim kvocijentom inteligencije na svijetu. Prema njezinim riječima, dopisnik Craig Whitaker pitao ju je sljedeće:

"Pretpostavimo da ste u zabavnoj igranoj emisiji u kojoj se nalaze troja vrata: iza jednih vrata je automobil, iza ostalih koze. Birate vrata, recimo broj 1, a voditelj, koji zna što je iza vrata, otvori druga vrata, recimo broj 3, iza kojih je koza. Zatim vam kaže: "Želite li izabrati vrata broj 2?" Isplati li vam se promijeniti mišljenje?"

Učenik A pažljivo stavlja VR naočale i otvara vježbu MONTY HALL PROBLEM u virtualnoj knjižnici u VR aplikaciji.

Učenik B (igrač) bira vrata, učenik A (voditelj) otvara jedna od preostalih vrata. Zajedno odlučuju koja su vrata s točnom vjerojatnošću za drugi izbor. Točna vjerojatnost je $\frac{1}{3}$ za vrata koja su prvi izbor i $\frac{2}{3}$ za vrata koja su drugi, promijenjeni izbor.

Jednostavna rješenja

Rješenje koje je predstavio vos Savant u *Paradeu* pokazuje tri moguća rasporeda jednog automobila i dvije koze iza troja vrata i rezultat zadržavanja ili promjene početnog izbora u oba slučaja:

Iza vrata 1	Iza vrata 2	Iza vrata 3	Rezultat ako se ostaje kod prvog izbora	Rezultat ako se promijeni prvi izbor
koza	koza	auto	osvaja kozu	Osvaja auto
koza	auto	koza	Osvaja kozu	Osvaja auto
auto	koza	koza	Osvaja auto	Osvaja kozu

Igrač koji ostane kod prvog izbora pobjeđuje u samo jednom od tri jednako vjerojatnih slučaja dok igrač koji promijeni mišljenje pobjeđuje u dva od tri slučaja.

Drugi način razumijevanja rješenja je da se dvojica vrata koja nisu odabrana promatraju zajedno. Vjerojatnost $2/3$ za pronalaženje automobila nije promijenjena otvaranjem jednih od tih vrata jer će Monty, znajući gdje je automobil, sigurno otkriti kozu. Dakle, izbor igrača nakon što vođitelj otvori vrata ne razlikuje se od slučaja kad vođitelj nudi igraču mogućnost promjene mišljenja. Promjena mišljenja u ovom slučaju igraču daje vjerojatnost $2/3$ da će izabrati automobil.

Uvjetna vjerojatnost direktnim računanjem

Prema definiciji, uvjetna vjerojatnost pobjede promjenom mišljenja s obzirom na to da igrač bira vrata 1, a vođitelj otvara vrata 3, vjerojatnost je za događaj "automobil je iza vrata 2, a vođitelj otvara vrata 3" podijeljena s vjerojatnošću događaja "vođitelj otvara vrata 3". Te se vjerojatnosti mogu odrediti temeljem uvjetnih vjerojatnosti prikazanih u

sljedećoj tablici. Uvjetna vjerojatnost pobjede promjenom mišljenja je $\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$.

Auto skriven iza vrata 3	Auto skriven iza vrata 1		Auto skriven iza vrata 2
Igrač na početku bira vrata 1			
Voditelj mora otvoriti vrata 2	Voditelj nasumično otvara vrata 2	Voditelj nasumično otvara vrata 3	Voditelj mora otvoriti vrata 3
Vjerojatnost $1/3$	Vjerojatnost $1/6$	Vjerojatnost $1/6$	Vjerojatnost $1/3$
Promjena pobjeđuje	Promjena gubi	Promjena gubi	Promjena pobjeđuje
U slučajevima kad vođitelj otvara vrata 2, promjena mišljenja pobjeđuje dvostruko češće nego ostanak kod prvog izbora		U slučajevima kad vođitelj otvara vrata 3, promjena mišljenja pobjeđuje dvostruko češće nego ostanak kod prvog izbora	

EVALUACIJA

1. Sviđa mi se način rada na ovom satu	1	2	3	4	5
2. Ovaj sat mi je bio zanimljiv	1	2	3	4	5
3. Jasno mi je što sam trebao naučiti na ovom satu	1	2	3	4	5
4. Gradivo je bilo jednostavno objašnjeno	1	2	3	4	5
5. Savladao sam gradivo	1	2	3	4	5
6. Smatram da sam bio aktivan na ovom satu	1	2	3	4	5
7. Na ovom satu bio sam aktivniji nego inače	1	2	3	4	5
8. Svojom aktivnošću doprinio sam kvaliteti nastave	1	2	3	4	5
9. Bio sam motiviran za rad na ovom satu	1	2	3	4	5
10. Preferiram korištenje VR-a u nastavi	1	2	3	4	5
11. Navedi dvije stvari koje su ti se sviđale na satu:					
12. Navedi dvije stvari koje ti se nisu sviđale na satu:					

SMJERNICE ZA PRILAGODBU POUČAVANJA

Svaki se učenik razlikuje i njihove potrebe za usvajanje ishoda mogu se razlikovati. U nastavku je nekoliko savjeta kako prilagoditi ostvarivanje ishoda učenicima s teškoćama u učenju.

- Kada dajete zadatke učenicima, pokušajte ih podijeliti na manje dijelove. Izbjegavajte dvostruke zadatke u uputama. Imajte na umu da je u slučaju operacija/vježbi s više koraka potrebno pomoći učenicima u pojedinim koracima.
- Možete koristiti liste za provjeru svakog pojedinog koraka učenika kako biste bili sigurni da su učinili sve korake.
- Pazite da font, razmak između redova i poravnanje vašeg dokumenta budu primjereni učenicima s teškoćama u učenju. Preporučuje se upotreba običnog, ravnomjerno raspoređenog sans serif fonta, kao što su Arial i Comic Sans. Ostali: Verdana, Tahoma, Century Gothic i Trebuchet. Razmak bi trebao biti 1,5 i pokušajte izbjeći obostrano poravnanje u tekstu.
- Na kraju svake aktivnosti odvojite malo vremena i pitajte učenike što su naučili i ponovite svaki korak u njihovom procesu učenja.
- Provjerite je li materijal dovoljno jednostavan učenicima za korištenje.
- Dok koristite različite medije (papir, računala i vizualna pomagala), odaberite pozadinu koja nije bijela jer učenicima s poremećajima učenja ona može biti svijetla. Najbolji izbor bi bila krem ili nježna pastelna boja, ali pokušajte testirati različite boje kako biste saznali više o preferencijama učenika.
- Da biste potaknuli kratkotrajno i dugoročno pamćenje, pripremite za sve učenike u učionici upute koje opisuju što će naučiti u ovoj lekciji i završite je rezimeom naučenog. Na taj će način ojačati sposobnost pamćenja informacija.

PRIMJER:

1. Svaku lekciju započnite kratkim „ulaznim“ informacijama

- Danas ćemo proučavati temu (naziv teme)
- Reći ću vam: (navedite 3 ključne riječi povezane s temom)
- Zatim ću predstaviti vježbe: (imenovati vježbe)
- Zatim ćemo raditi vježbe (objasniti način rada učenika: npr. zajedno s učiteljem / u parovima / pojedinačno)
- Kad provedemo vježbe [Nastaviti]

2. Zatim završite lekciju kratkim "izlaznim" informacijama

- Na temelju dane nastavne jedinice moći ćemo (tema lekcije)

- **Najvažniji ishodi: (imenovati 3 ključne riječi povezane s temom)**
- **Možemo... (ispričati o radu učenika tijekom predavanja)**
- **Primijenit ćemo ostvarene ishode sljedeći put kada ćemo učiti o (imenovati sljedeću temu).**

Napomene vezane uz prilagodbu oduzet će 5 minuta u realizaciji nastavne podteme, ali mogu napraviti veliki pomak u načinu na koji će se usvojiti ishodi. Pokušajte ovo usvojiti kao rutinu u radu.