

### CUVINTE CHEIE

- medii
- medie aritmetică
- medie geometrică
- inegalități
- capital inițial
- capital final
- dobândă simplă
- dobândă compusă



### RESURSE NECESARE

- tablă
- instrumente geometrice
- fișe de lucru
- foarfece
- proiector
- laptop / computer
- calculator de buzunar

TOPIC: INEGALITATEA DINTRE MEDIA ARITMETICĂ ȘI MEDIA GEOMETRICĂ

SUBIECT: INEGALITATEA DINTRE MEDIA ARITMETICĂ ȘI MEDIA GEOMETRICĂ

NIVEL/VÂRSTĂ: 14-15

CUNOȘTINȚE PREMERGĂTOARE: operații cu fracții, operații cu radicali, media aritmetică, media geometrică, capital inițial, capital final, dobândă simplă și dobândă compusă

CORELAȚIE: Matematici financiare, Artă, Arhitectură

### REZULTATELE ÎNVĂȚĂRII

- Calculul mediilor aritmetice și geometrice în situații practice, concrete

### METODE DE ÎNVĂȚARE

- Activități practice
- Activități interactive
- Activități în perechi

---

## ACTIVITĂȚI

---

### Activitate 1 - 5 minute

Profesorul prezintă topicul lecției și le amintește elevilor următoarele concepte: Cuvântul „medie” apare aproape zilnic în discuțiile oamenilor, în expresii ca: „durata medie a vieții unui om”, „durata medie de viață a unui aparat”, „greutatea medie a unui produs”. Media este o valoare tipică sau centrală a unui număr mare de date. Pentru ca mărimea mediei să aibă un caracter obiectiv, este necesar să alegeți tipul adecvat de medie. Mediile cel mai des folosite sunt: media aritmetică; media geometrică; media armonică; media pătratică.

Media aritmetică a unui set de  $n$  numere  $x_1, x_2, \dots, x_n$  este suma numerelor împărțită la  $n$ :

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Media geometrică este radicalul de ordine  $n$  a produsului celor  $n$  numere pozitive. Pentru un set de  $n$  numere pozitive  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , media geometrică este definită ca:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

### Activitate 2 - 15 minute

Pentru a vedea cât de important este să alegeți tipul adecvat de medie, profesorul prezintă următoarea activitate practică și amintește noțiunile necesare. Elevii sunt împărțiți în perechi: albe, roșii și negre.

Profesorul le amintește elevilor cum se calculează capitalul final în cazul în care avem dobândă simplă, respectiv dobândă compusă:

- Capitalul final în cazul dobânzii simple  $C_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$
- Capitalul final în cazul dobânzii compuse  $C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Profesorul prezintă problema de rezolvat:

O persoană depune la bancă o sumă (capital inițial) de 1,000,000 lei pe o perioadă de 5 ani, cu rata anuală a dobânzii variind astfel: 1%, 2%, 4%, 5%, 10%. Să se afle rata anuală medie și capitalul final după cei 5 ani.

**Echipele albe** vor folosi calea mai lungă, dar mai sigură, calculând ratele dobânzii simple pentru fiecare an. **Echipele roșii** vor calcula rata medie a dobânzii folosind media aritmetică și vor calcula capitalul final folosind dobânda compusă.

**Echipele negre** vor calcula rata medie a dobânzii folosind media geometrică și vor calcula capitalul final folosind rata dobânzii compuse.

**Echipele albe** calculează capitalul final care corespunde fiecărui an:

$$\text{An 1: } C_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) = 1000000 \cdot 1,01 = 1010000 \text{ lei}$$

$$\text{An 2: } C_2 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) = 1010000 \cdot 1,02 = 1030200 \text{ lei}$$

$$\text{An 3: } C_3 = C_2 \cdot \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) = 1030200 \cdot 1,04 = 1071408 \text{ lei}$$

$$\text{An 4: } C_4 = C_3 \cdot \left(1 + \frac{p_4}{100}\right) = 1071408 \cdot 1,05 = 1124978,40 \text{ lei}$$

$$\text{An 5: } C_5 = C_4 \cdot \left(1 + \frac{p_5}{100}\right) = 1124978,40 \cdot 1,10 = 1237476,24 \text{ lei.}$$

**Echipele roșii** calculează:

$$\text{Coeficientul mediu: } 1 + \frac{p}{100} = \frac{1,01+1,02+1,04+1,05+1,10}{5} = 1,044.$$

$$\text{Capitalul final: } C_5 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 = 1000000 \cdot (1,044)^5 = 1240230,745396224 \text{ lei.}$$

**Echipele negre** calculează:

$$\text{Coeficientul mediu: } 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[5]{1,01 \cdot 1,02 \cdot 1,04 \cdot 1,05 \cdot 1,10} = \sqrt[5]{1,23747624} \approx 1,04353585.$$

$$\text{Capitalul final: } C_5 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 \approx 1000000 \cdot (1,04353585)^5 \approx 1000000 \cdot 1,23747624 \approx 1237476,24 \text{ lei.}$$

După ce fiecare echipă își prezintă rezultatele, se vor trage concluziile. Echipele albe și negre au obținut același rezultat, cel corect. Echipa roșie a obținut un rezultat mai mare cu 2700 lei. De ce? Deoarece ei au folosit operații de adunare (media aritmetică) într-un proces de multiplicare (capitalul final în cazul dobânzii compuse).

### Activitate 3 - 15 minute

Profesorul prezintă inegalitatea mediilor.

Pentru un set de  $n$  numere pozitive  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , folosind notațiile matematice, MA-MG, inegalitatea este:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n},$$

iar egalitatea apare dacă și numai dacă  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Pentru  $n=2$ ,  $a, b$  numere pozitive, inegalitatea devine:

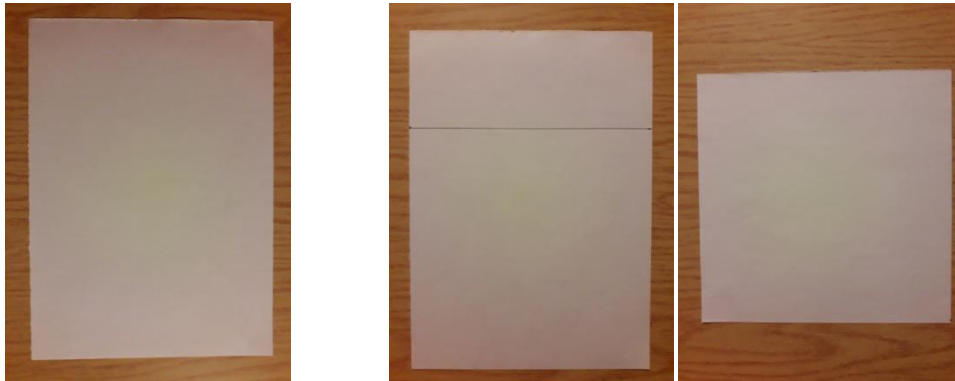
$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

iar egalitatea apare dacă și numai dacă  $a = b$ .

Inegalitatea MA–MG este una de bază, utilizată pentru a demonstra alte inegalități.

Mai jos aveți demonstrația vizuală:

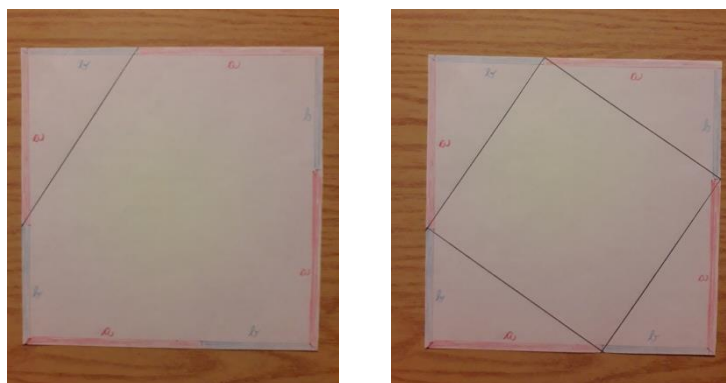
1. Faceți un pătrat dintr-o foaie A4.



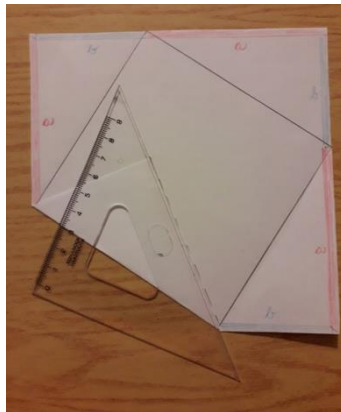
2. Împărțiți fiecare latură în două segmente având lungimile  $a$  și  $b$ .



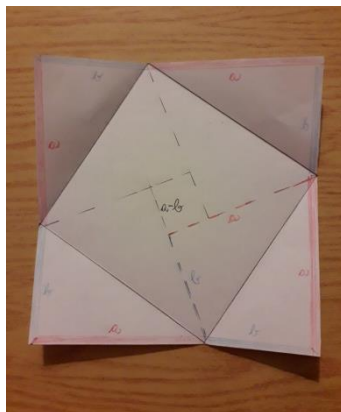
3. Trasați o linie de la un punct la altul, cum este arătat în imagini:



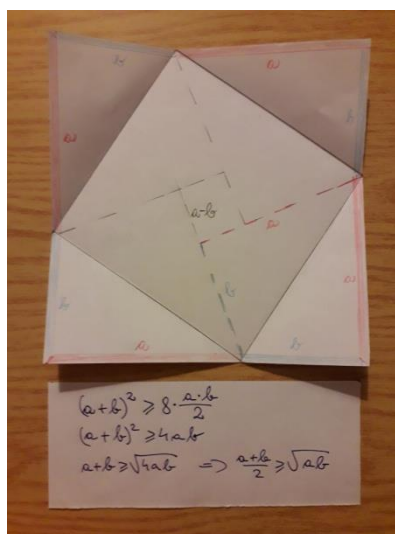
4. Îndoțiți bucata de hârtie pe segmentele obținute



5. Trasați o linie punctată de-a lungul laturii mai lungi (în desen lungimea  $a$ ).

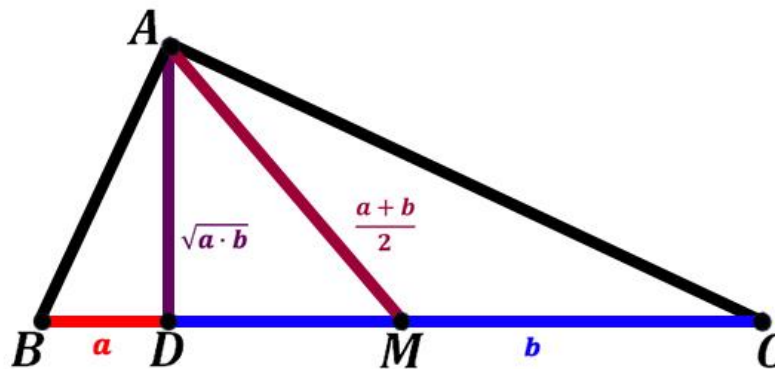


6. Aria pătratului cu lungimea laturii  $a + b$ ,  $S = (a + b)^2$ , este mai mare decât aria celor 8 triunghiuri dreptunghice având catetele  $a$  și  $b$ , care este  $8 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$ . Și obținem egalitate dacă și numai dacă  $a = b$ .



**Activitate 4 - 5 minute** (doar dacă mai rămân cel puțin 15 minute pentru evaluare)

Profesorul prezintă o interpretare geometrică a inegalității mediilor:



În orice triunghi dreptunghic înălțimea dusă din unghiul drept este egală cu media geometrică a proiecțiilor catetelor pe ipotenuză, iar mediana dusă din unghiul drept este egală cu media aritmetică a proiecțiilor catetelor pe ipotenuză. Lungimea înălțimii este mai mică sau egală ca lungimea medianei.

---

## EVALUARE

---

Fișă de evaluare

Toate problemele necesită rezolvări complete. Utilizarea calculatorului de buzunar este permisă.

(10p) 1. Determinați dacă următoarea afirmație este adevărată (A) sau falsă (F):

" $\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc}, \forall a, b, c \in (0, \infty)$ " (A sau F) și explicați de ce.

(20p) 2. Calculați media aritmetică a numerelor 3, 4, 27, 64. Calculați media geometrică a numerelor: 3, 4, 27, 64. Comparați rezultatele.

(15p) 3. Calculați media aritmetică a numerelor:  $3 + \sqrt{8}$  și  $3 - \sqrt{8}$ .

(15p) 4. Calculați media geometrică a numerelor  $3 + \sqrt{8}$  și  $3 - \sqrt{8}$ .

(30p) 5. O persoană depune la bancă o sumă (capital inițial) de 1000000 lei pe o perioadă de 3 ani, cu rata anuală a dobânzii variind astfel: 1%, 4%, 5%. Calculați capitalul final de la sfârșitul celor 3 ani.

10 puncte din oficiu.

Timp de lucru 15 minute.

Soluții:

1. Afirmația este falsă. Dacă  $a = b = c$ , atunci inegalitatea devine egalitate.

$$2. \frac{3+4+27+64}{4} = \frac{98}{4} = 24,5. \sqrt[3]{3 \cdot 4 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{2^8 \cdot 3^4} = 2^2 \cdot 3 = 12. MA > MG.$$

$$3. \frac{(3+\sqrt{8})+(3-\sqrt{8})}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$4. \sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})} = \sqrt{9-8} = 1.$$

5. Soluție 1

Calculăm capitalul final care corespunde fiecărui an:

$$\text{An 1: } C_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) = 1000000 \cdot 1,01 = 1010000 \text{ lei}$$

$$\text{An 2: } C_2 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) = 1010000 \cdot 1,04 = 1050400 \text{ lei}$$

$$\text{An 3: } C_3 = C_2 \cdot \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) = 1050400 \cdot 1,05 = 1102920 \text{ lei.}$$

Soluție 2

$$\text{Calculăm coeficientul mediu: } 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[3]{1,01 \cdot 1,04 \cdot 1,05} = \sqrt[3]{1,10292} \approx 1,0331927199.$$

$$\text{Calculăm capitalul final: } C_3 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \approx 1000000 \cdot (1,0331927199)^3 \approx 1000000 \cdot 1,10292 \approx 1102920 \text{ lei.}$$



---

## SFATURI/ INDICAȚII PENTRU ÎNVĂȚĂMÂNT INCLUZIV

---

Fiecare elev este diferit, iar nevoile lor pentru materiale pot varia. Mai jos veți găsi o serie de sfaturi care ar putea face lecțiile de matematică mai incluzive pentru elevii care se confruntă cu dificultăți de învățare.

- Când dați sarcini elevilor încercați să oferiți informații puține o dată. Evitați sarcinile duble într-o instrucțiune. Nu uitați că în cazul operațiilor/exercițiilor cu mai mulți pași, este esențial să ajutați elevii să descompună pașii.
- Puteți utiliza liste de verificare (checklist) pentru elevi, ca să vă asigurați că au parcurs toți pașii.
- Asigurați-vă că fontul, spațierea între rânduri și alinierea documentului dvs. este accesibilă pentru elevii cu dificultăți de învățare. Este recomandat să folosiți un font simplu, cu spații egale, precum Arial și Comic Sans. Alte exemple sunt: Verdana, Tahoma, Century Gothic și Trebuchet. Spațierea ar trebui să fie de 1.5 și încercați să evitați alinierea textului.
- La finalul fiecărei activități, acordați-vă puțin timp să-i întrebați pe elevi ce au învățat, pentru a conștientiza toți pașii procesului lor de învățare.
- Asigurați-vă că materialul pe care îl manipulează elevii este suficient de ușor de înțeles.
- În timp ce folosiți medii diferite de lucru (hârtie, computer și alte suporturi vizuale) alegeți culori de fundal diferite de alb, acesta poate fi prea puternic și luminos pentru elevii cu dificultăți de învățare. Cele mai bune alegeri ar fi crem sau pasteluri delicate, dar testați culori diferite pentru a afla preferințele elevilor.
- Pentru a stimula memoria de scurtă și de lungă durată, pregătiți pentru toți elevii din clasă o prezentare/schiță care descrie ce vor învăța în această oră și terminați ora cu un rezumat a ceea ce a fost predat. Astfel își vor îmbunătăți capacitatea de a reține informații.

### **EXEMPLU:**

## 1. Începeți fiecare lecție cu un scurt “Check-in”

- Astăzi, vom studia (numele subiectului)
- Vă voi vorbi despre: (numiți 3 cuvinte cheie ce au legătură cu subiectul)
- Ulterior voi prezenta exercițiile: (precizați exercițiile din manual)
- Apoi vom rezolva exerciții (explicați modul în care vor lucra elevii: ex. împreună cu profesorul / în perechi / individual)
- O data ce vor fi finalizate exercițiile [a se continua]

## 2. Finalizați lecția cu un scurt “Check-out”

- În această oră am vorbit despre (subiectul lecției)
- Cele mai importante aspecte au fost: (numiți 3 cuvinte cheie ce au legătură cu subiectul)
- Am reușit să... (menționați munca depusă de elevi în timpul orei)
- Vom explora ... data viitoare când vom învăța despre (numiți subiectul următor)

Este o mică ajustare care va lua 5 minute din lecție, dar care poate face o mare diferență în ceea ce privește felul în care ce a fost predat va fi reținut. Încercați să vă formați acest obicei.

---

## BIBLIOGRAFIE

---

Roger B. Nelsen, Proofs Without Words II - More Exercises in Visual Thinking, Published and Distributed by The Mathematical Association of America, 2000

Internet - <https://towardsdatascience.com/on-average-youre-using-the-wrong-average-geometric-harmonic-means-in-data-analysis-2a703e21ea0>