



PLAN DE LECȚIE 06: PARADOXUL SĂLII MONTY

Subiect: probabilitate condiționată

Nivel: Vârsta 15 - 18 ani

Cunoștințe anterioare: evenimente

Corelație: statistica, finanțe, jocuri de noroc, inteligența artificială, informatica, teoria jocurilor

Timp: 60 minute

REZULTATELE ÎNVĂȚĂRII

- Teoria probabilităților de utilizare
- Aflarea probabilității condiționate

METODE DE PREDARE

- Tehnologie VR
- munca individuală și munca în pereche

CUVINTE CHEIE

- teoria probabilităților
- Eveniment
- probabilitate condiționată
- Paradoxul Monty Hall

Resurse

- Căști VR
- Tablă
- laptop/ calculator, calculator de buzunar, proiector

Activități

REGULI DE CONDUITĂ LA UTILIZAREA VR ÎN CLASĂ (5 min)

Profesorul începe discuția cu elevii întrebându-i despre utilizarea VR și așteptările lor în utilizarea VR în clasă.

După discuție, profesorul definește metodele de lucru și regulile de conduită pentru elevi în ceea ce privește măsurile de siguranță pentru utilizarea căștilor VR în clasă și învățarea în mediul virtual:

- ascultați cu atenție profesorul
- elimina obstacolele fizice înainte de a utiliza VR
- lucrați întotdeauna în pereche - niciodată singur
- păstrați aparatul curat.

ACTIVITATE 1 (5-10 min) INTRODUCERE ÎN LECȚIE

Forma de lucru: frontală

Accesorii necesare: tablă sau PowerPoint pregătit

Profesorul anunță subiectul lecției: Probabilități condiționate

Conceptul mașină va fi utilizat este revizuit.

Cunoștințe anterioare: experiment aleatoriu, eșantion, eveniment, eveniment elementar, eveniment sigur, eveniment imposibil, evenimente incompatibile, eveniment opus, probabilitatea unui eveniment, evenimente equiprobabile.

Teorema. Dacă – multitudinea tuturor rezultatelor posibile ale unui experiment aleatoriu este finită și toate evenimentele elementare sunt echipate, atunci probabilitatea oricărui eveniment , raportat la experimentul considerat, este

$$P(A) = \frac{\text{number of favourable cases}}{\text{number of possible cases}}.$$

Teorema. Este considerat un experiment aleatoriu cu – multitudinea de rezultate posibile, finite și non-goale, și – evenimente legate de experimentul avut în vedere. Apoi:EA, B

i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, dacă A, B sunt incompatibile;

ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, if A, B nu sunt incompatibile;

iii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, unde \bar{A} este evenimentul opus lui A.

ACTIVITATE 2 (20 min) PROBABILITATE CONDIȚIONATĂ

Forma de lucru: frontală

Accesorii necesare: tablă sau PowerPoint pregătit

Profesorul anunță scopul noii noțiuni, și anume aceea de a evalua probabilitatea unui eveniment depinde (sau depinde doar în aparență) de un alt eveniment deja consumat.

Problema 1.

Intr-o urmă sunt 5 bile albe și 9 bile negre. Două bile sunt extrase succesiv, fără a transforma mingea în urnă. Evenimentele sunt considerate:

A: „prima extrasă este neagră”;

B: „prima extrasă este albă”;

C: „a doua bilă extrasă este albă”.

a) Mașină este probabilitatea evenimentului A?

b) Mașină este probabilitatea evenimentului C știind că, înainte de finalizarea sa, evenimentul A a fost finalizat?

c) Mașină este probabilitatea evenimentului C știind că evenimentul a fost finalizat înainte de a fi realizat B?

Soluție.

$$a) P(A) = \frac{\text{number of favourable cases}}{\text{number of possible cases}}$$

numărul de cazuri posibile este $5 + 9 = 14$

numărul de cazuri favorabile realizării evenimentului A este 9, deci $P(A) = \frac{9}{14}$.

b) În urma finalizării evenimentului A, 5 bile albe și 8 bilele negre au rămas în urnă, astfel

$$P(C) = \frac{5}{13}.$$

c) În urma finalizării evenimentului B, 4 bile albe și 9 bilele negre au rămas în urnă, astfel

$$P(C) = \frac{4}{13}.$$

Definiție. Se dau două evenimente $A, B \in \mathcal{P}(E)$ so $P(A) > 0$.

Acesta definește probabilitatea condiționată a B dat de A prin $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Acest lucru este $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ atins - probabilitatea ca ambele evenimente A și B este egală cu probabilitatea de A înmulțită cu probabilitatea condiționată de B dat de A.

Problema 2.

Într-o urnă există 5 bile albe și 9 bile negre. Extrageți două bile succesiv, fără a transforma mingea în urnă. Mașină este probabilitatea de a extrage o bilă neagră urmată de o bilă albă?

Solution.

Evenimentele sunt considerate:

A: „prima extrasă este neagră”;

B: „a doua bilă extrasă este albă”.

Obținem $P(A) = \frac{9}{14}$ and $P(B|A) = \frac{5}{13}$

Deci $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{182}$.

Problema 3.

Două zaruri de culori diferite sunt aruncate simultan. Evenimente luate în considerare:

A: „numărul de pe primele zaruri este mai mic decât cel obținut la al doilea zar”;

B: „suma punctelor câștigate pe cele două zaruri este mai mică sau egală cu 5”.

Care este probabilitatea condiționată a lui B dat fiind A?

Soluție.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Deoarece zarurile au culori diferite, numărul de cazuri posibile este $6 \cdot 6 = 36$.

A

$= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$

B = $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

$A \cap B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$

deci $P(A) = \frac{15}{36}$, $P(B) = \frac{10}{36}$, $P(A \cap B) = \frac{4}{36}$ și $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{4}{15}$.

ACTIVITATE 3 (15 min) PROBABILITATE CONDIȚIONATĂ ÎN APLIMAȘINĂE VR

Profesorul atribuie sarcina elevilor.

Student:

1. găsește și selectează exercițiul MONTY HALL PARADOX pe raftul de exerciții
2. rezolvă activitățile în aplicația VR

Forma de lucru: lucrul în perechi

Accesorii necesare: căști VR

CURSUL ACTIVITĂȚII:

Profesorul împarte elevii în perechi.

Profesorul prezintă elevilor problema Monty Hall.

Care este problema Monty Hall?

De asemenea, cunoscut sub numele de *paradoxul Monty Hall*, problema celor *trei uși*, *problema quizmaster*, iar problema mașinii și a *caprelor*, problema a fost introdusă de biostatisticianul Steve Selvin (1975) într-o scrisoare către jurnalul *The American Statistician*. În funcție de ipotezele făcute, ea poate fi văzută ca fiind identică din punct de vedere matematic cu problema celor trei deținuți a lui Martin Gardner (1959). A fost numit de Selvin după numele de scenă al quizmaster-ului real, Monty Halperin de la emisiunea TV "Let's make a Deal" din 1960. Este un paradox celebru, care are o soluție care este atât de absurd, cei mai mulți oameni refuză să creadă că este adevărat.

Problema a devenit celebră în întreaga lume în 1990, odată cu prezentarea sa în populara rubrică săptămânală "Ask Marilyn" din revista *Parade*. Autoarea Marilyn vos Savant, era, conform *Guinness Book of Records* de la acea vreme, persoana cu cel mai mare IQ din lume. Rescrierea în propriile ei cuvinte o problemă reprezentată de un corespondent, Craig Whitaker, vos Savant întrebat următoarele:

"Să presupunem că sunteți la un spectacol, și vi se oferă posibilitatea de a alege din trei uși: în spatele unei uși este o mașină; în spatele celorlalte, capre. Alegeți o ușă, să zicem Nr. 1, iar gazda, care știe ce e în spatele ușilor, deschide o altă ușă, să zicem Nr. 3, care are o capră. Apoi îți spune, "Vrei să alegi ușa nr... Este în avantajul tău să schimbi alegerea ta?"

Elevul A își pune cu atenție căștile VR și deschide exercițiul MONTY HALL PARADOX într-o bibliotecă virtuală într-o aplicație VR.

Elevul B (jucător) alege o ușă, Elevul A (gazdă) deschide una dintre ușile rămase. Împreună, ei determină careă ușă este cu probabilitatea corectă pentru a doua alegere.

Probabilitățile corecte sunt $\frac{1}{3}$ pentru ușa aleasă inițial și $\frac{2}{3}$ pentru ușa caree ar trebui aleasă a doua oară.

Soluții simple

Soluția prezentată de vos Savant in *Parade* arată cele trei aranjamente posibile ale unei mașini și a două capre în spatele a trei uși și rezultatul șederii sau comutării după ce inițial a cules ușa 1 în fiecare caz:

În spatele ușii 1	În spatele ușii 2	În spatele ușii 3	Rezultat dacă rămâneți la ușa #1	Rezultat dacă treceți la ușa oferită
Capra	Capra	Mașina	Câștigă capra	Câștigă mașina
Capra	Mașina	Capra	Câștigă capra	Câștigă mașina
Mașina	Capra	Capra	Câștigă mașina	Câștigă capra

Un jucător care rămâne cu alegerea inițială se află doar într-una din cele trei dintre aceste posibilități la fel de probabile, în timp ce un jucător care schimbă pe cauză în două din trei.

O altă modalitate de a înțelege soluția este de a lua în considerare cele două uși originale ne alese împreună. Șansa de $2/3$ de a găsi mașina nu a fost schimbată prin deschiderea uneia dintre aceste uși, deoarece Monty, cunoscând locația unui tine, este sigur că va dezvălui o capră. Deci, alegerea jucătorului după ce gazda deschide o ușă nu este diferită de cea în care gazda i-a oferit jucătorului opțiunea de a trece de la ușa aleasă inițial la setul ambelor uși rămase. Comutatorul în acest caz oferă în mod clar jucătorului o probabilitate de $2/3$ de a alege mașina.

Probabilitate condiționată prin calcul direct

Prin definiție, probabilitatea condiționată de câștig prin comutare având în vedere că concurentul alege inițial ușa 1 și gazda deschide ușa 3 este probabilitatea pentru eveniment "tine este în spatele ușii 2 și gazda deschide ușa 3" împărțită la probabilitatea pentru "gazda deschide ușa 3". Aceste probabilități pot fi determinate referindu-se la tabelul de probabilitate condiționată de mai jos. Probabilitatea condițională de câștig prin

comutare este $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$.

Mașină ascunsă în spatele ușii 3	Mașină ascunsă în spatele ușii 1		Mașină ascunsă în spatele ușii 2
Jucătorul alege inițial ușa 1			
Gazda trebuie să deschidă ușa 2	Gazda deschide aleatoriu ușa 2	Gazda deschide aleatoriu ușa 3	Gazda trebuie să deschidă ușa 3
Probabilitate $1/3$	Probabilitate $1/6$	Probabilitate $1/6$	Probabilitate $1/3$
Comutarea victoriilor	Comutarea pierde	Comutarea pierde	Comutarea victoriilor
În acele cazuri în care gazda deschide Ușa 2, comutarea câștigă de două ori mai des decât șederea		În acele cazuri în care gazda deschide Ușa 3, comutarea câștigă de două ori mai des decât șederea	

1. Îmi place modul de lucru în această lecție.	1	2	3	4	5
2. Lecția asta a fost interesantă.	1	2	3	4	5
3. Este clar ce trebuia să învăț în această lecție.	1	2	3	4	5
4. Subiectul a fost explicat în mod clar.	1	2	3	4	5
5. Am învățat subiectul.	1	2	3	4	5
6. Cred că am participat activ la această lecție.	1	2	3	4	5
7. Am fost mai activ în această lecție decât de obicei.	1	2	3	4	5
8. Fiind activ am contribuit la calitatea lecției.	1	2	3	4	5
9. Am fost motivat pentru munca în această lecție.	1	2	3	4	5
10. Prefer să folosesc VR în lecții.	1	2	3	4	5
11. Numește două lucruri care ți-au plăcut în această lecție.					
12. Spune două lucruri care nu ți-au plăcut în lecția asta.					

ORIENTĂRI PRIVIND INCLUZIUNEA

Fiecare elev este diferit, iar nevoile lui în ce privește materialele pot varia. Mai jos veți găsi o serie de sfaturi care ar putea face lecțiile de matematică mai incluzive pentru elevii care se confruntă cu dificultăți de învățare.

- Când dați sarcini elevilor încercați să oferiți informații puține o dată. Evitați sarcinile duble într-o instrucțiune. Nu uitați că în cazul operațiilor/exercițiilor cu mai mulți pași, este esențial să ajutați elevii să descompună pașii.
- Puteți utiliza liste de verificare (checklist) pentru elevi, ca să vă asigurați că au parcurs toți pașii.
- Asigurați-vă că fontul, spațierea între rânduri și alinierea documentului dvs. este accesibilă pentru elevii cu dificultăți de învățare. Este recomandat să folosiți un font simplu, cu spații egale, precum Arial și Comic Sans. Alte exemple sunt: Verdana, Tahoma, Century Gothic și Trebuchet. Spațierea ar trebui să fie de 1.5 și încercați să evitați alinierea textului.
- La finalul fiecărei activități, acordați-vă puțin timp să-i întrebați pe elevi ce au învățat, pentru a conștientiza toți pașii procesului lor de învățare.
- Asigurați-vă că materialul pe care îl manipulează elevii este suficient de ușor de înțeles.
- În timp ce folosiți medii diferite de lucru (hârtie, computer și alte suporturi vizuale) alegeți culori de fundal diferite de alb, acesta poate fi prea puternic și luminos pentru elevii cu dificultăți de învățare. Cele mai bune alegeri ar fi crem sau pasteluri delicate, dar testați culori diferite pentru a afla preferințele elevilor.
- Pentru a stimula memoria de scurtă și de lungă durată, pregătiți pentru toți elevii din clasă o prezentare/schiță care descrie ce vor învăța în această oră și terminați ora cu un rezumat a ceea ce a fost predat. Astfel își vor îmbunătăți capacitatea de a reține informații.

EXEMPLU:

1. Începeți fiecare lecție cu un scurt "Check-in"

- Astăzi, vom studia (numele subiectului)
- Vă voi vorbi despre: (numiți 3 cuvinte cheie ce au legătură cu subiectul)
- Ulterior voi prezenta exercițiile: (precizați exercițiile din manual)
- Apoi vom rezolva exerciții (explicați modul în care vor lucra elevii: ex. împreună cu profesorul / în perechi / individual)
- data ce vor fi finalizate exercițiile [a se continua]

2. Finalizați lecția cu un scurt “Check-out”

- În această oră am vorbit despre (subiectul lecției)
- Cele mai importante aspecte au fost: (numiți 3 cuvinte cheie ce au legătură cu subiectul)
- Am reușit să... (menționați munca depusă de elevi în timpul orei)
- Vom explora ... data viitoare când vom învăța despre (numiți subiectul următor)

Este o mică ajustare care va lua 5 minute din lecție, dar care poate face o mare diferență în ceea ce privește felul în care ce a fost predat va fi reținut. Încercați să vă formați acest obicei.