LESSON SCENARIO 08:
L'INÉGALITÉ MOYENNE ARITHMÉTIQUE
- MOYENNE GÉOMÉTRIQUE

SUJET : L'INÉGALITÉ MOYENNE ARITHMÉTIQUE
- MOYENNE GÉOMÉTRIQUE

NIVEAU/ÂGE : 14-15 ANS

CONNAISSANCES : opérations avec des fractions, opérations avec des radicaux, moyenne arithmétique, moyenne géométrique, capital initial, capital final, intérêts simples et intérêts composés.

DOMAINE D'APPLICATION : Mathématiques financières, Art, Architecture

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE

- **Calcul de moyennes arithmétiques et géométriques dans des situations pratiques et concrètes**

MÉTHODES PÉDAGOGIQUES

- **Travaux pratiques**
- **Activité pratique**
- **Travail par deux**

MOTS CLÉS

- **Moyenne**
- **Moyenne arithmétique**
- **Moyenne géométrique**
- **Capital initial**
- **Capital final**
- **Intérêt simple**
- **Intérêt composé**

RESSOURCES

- **Tableau**
- **Instruments géométriques**
- **Feuilles de travail**
- **Ciseaux**
- **Projecteur**
- **PC / ordinateur**
- **Calculatrice**

Activité 1 - 5 minutes

L'enseignant présente le sujet de la leçon et rappelle aux élèves les notions suivantes :

Le mot "moyenne" se retrouve presque quotidiennement dans les discussions des gens, dans des expressions telles que: " durée de vie moyenne des populations ", " durée de vie moyenne d'un appareil ", " poids moyen d'un produit ". La moyenne est une valeur typique ou centrale d'un grand nombre de données. Pour que la moyenne ait un caractère objectif, il est nécessaire de choisir le bon type de moyenne. Les moyennes les plus utilisées sont : la moyenne arithmétique ; la moyenne géométrique ; la moyenne harmonique ; la moyenne carrée/quadratique.

La moyenne arithmétique d'une liste de n nombres x_1,x_2,…,x_n est égale à la somme des nombres divisée par n:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

The geometric mean is defined as the *n*th root of the product of *n*non-negative numbers. For a set of *n*non-negative numbers $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, the geometric mean is defined as:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}\,.$$

Activité 2 - 15 minutes

Afin de voir combien il est important de choisir le bon type de moyenne, l'enseignant présente l'activité pratique suivante et rappelle les notions nécessaires.
Les élèves sont divisés en trois paires : blanc, rouge et noir.
L'enseignant rappelle aux élèves comment calculer le capital final en cas d'intérêt simple et d'intérêt composé :

- le capital final en cas d'intérêt simple $C_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$
- le capital final en cas d'intérêt composé $C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

L'enseignant présente le problème à résoudre :
Une personne dépose à la banque un montant (capital initial) de 1 000 000 LEI (devise roumaine) sur une période de 5 ans, avec des taux d'intérêt

annuels variant comme suit : 1%, 2%, 4%, 5%, 10%. Nous devons calculer le taux annuel moyen (si applicable) et le capital final à la fin des 5 ans.

Les équipes blanches utiliseront le chemin le plus long, mais le plus sûr, en calculant les taux d'intérêt simples pour chaque année. **Les équipes rouges** calculeront le taux d'intérêt moyen en utilisant la moyenne arithmétique, puis ils calculeront le capital final en utilisant les intérêts composés.

Les équipes noires calculeront le taux d'intérêt moyen en utilisant la moyenne géométrique, puis calculeront le capital final en utilisant le taux d'intérêt composé.

Les équipes blanches calculent le capital final correspondant à chaque année :

Année 1: $C_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) = 1000000 \cdot 1{,}01 = 1010000$ lei

Année 2: $C_2 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) = 1010000 \cdot 1{,}02 = 1030200$ lei

Année 3: $C_3 = C_2 \cdot \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) = 1030200 \cdot 1{,}04 = 1071408$ lei

Année 4: $C_4 = C_3 \cdot \left(1 + \frac{p_4}{100}\right) = 1071408 \cdot 1{,}05 = 1124978{,}40$ lei

Année 5: $C_5 = C_4 \cdot \left(1 + \frac{p_5}{100}\right) = 1124978{,}40 \cdot 1{,}10 = 1237476{,}24$ lei.

Les équipes rouges calculent :

Le coefficient moyen $1 + \frac{p}{100} = \frac{1{,}01+1{,}02+1{,}04+1{,}05+1{,}10}{5} = 1{,}044.$

Le capital final : $C_5 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 = 1000000 \cdot (1{,}044)^5 = 1240230{,}745396224$ lei.

Les équipes noires calculent :

Le coefficient moyen :$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[5]{1{,}01 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}10} = \sqrt[5]{1{,}23747624} \approx 1{,}04353585.$

Le capital final : $C_5 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 \approx 1000000 \cdot (1{,}04353585)^5 \approx 1000000 \cdot 1{,}23747624 \approx 1237476{,}24$lei.

Après que chaque équipe ait présenté son résultat, les conclusions sont tirées. Les équipes blanche et noire ont obtenu le même résultat, le bon. L'équipe rouge a obtenu un supplément de 2700 LEI. Pourquoi ? Parce qu'ils ont utilisé une opération additive (la moyenne arithmétique) dans le cas d'un processus multiplicatif (le capital final dans le cas des intérêts composés).

Activité 3 - 15 minutes

L'enseignant présente l'inégalité des moyennes.

Pour un ensemble de *n* nombres non négatifs $x_1, x_2, \dots, x_n$, en utilisant les notations mathématiques, AM-GM, l'inégalité s'écrit comme suit :

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\,,$$

et cette égalité existe si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Le cas de deux nombres non négatifs a et b, est l'affirmation que

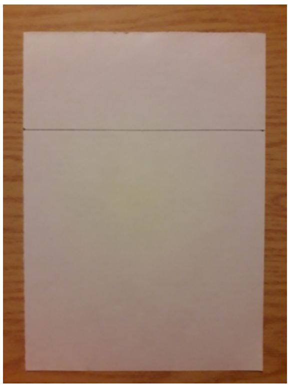
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

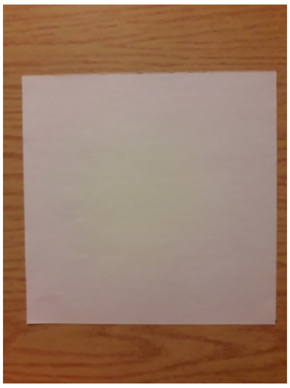
avec égalité si et seulement si $a = b$.

L'inégalité AM-GM est une inégalité de base, utilisée pour démontrer d'autres inégalités.

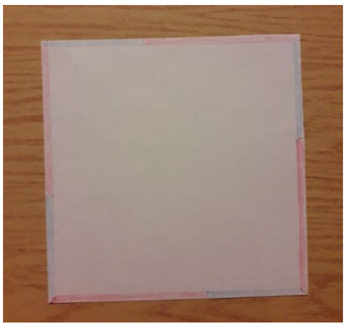
Vous trouverez ci-dessous une démonstration visuelle :

1. Faites un carré à partir d'une feuille de papier

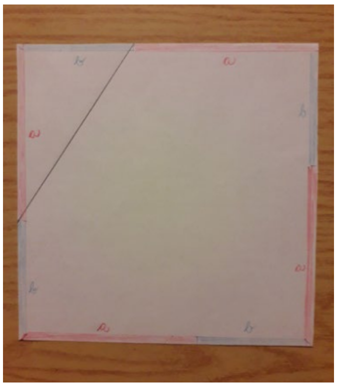
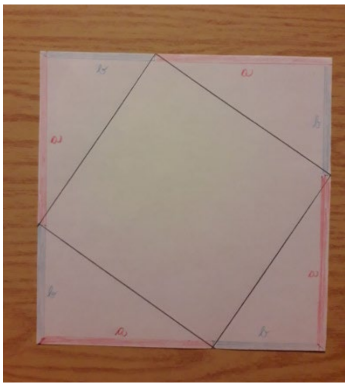




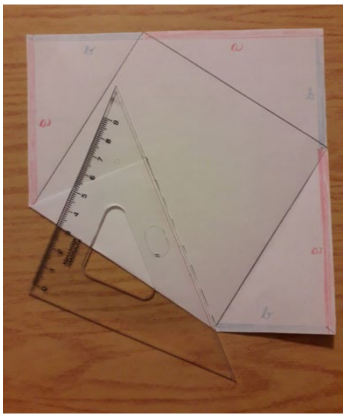
2. Divisez chaque côté en deux segments de longueur *a* et *b*.



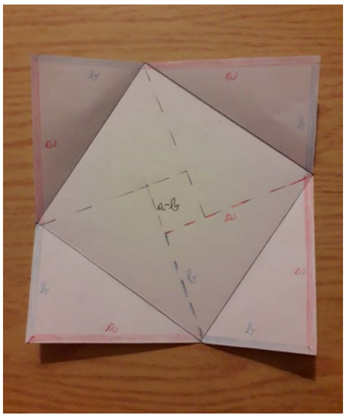
3. Tracez une ligne d'un point à l'autre, comme on le voit sur les photos :

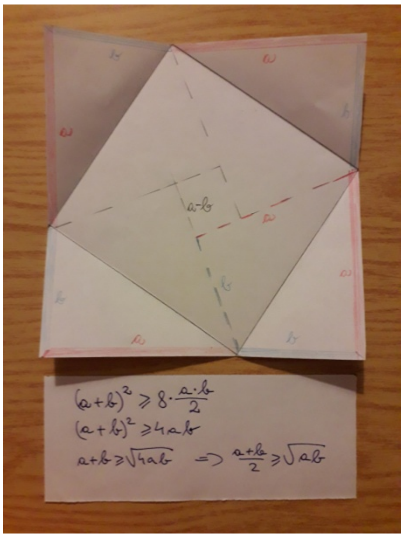
4. Pliez la feuille de papier le long des segments ainsi obtenus.



5. Tracez une ligne en pointillés le long du côté le plus long (de longueur *a* dans notre illustration).

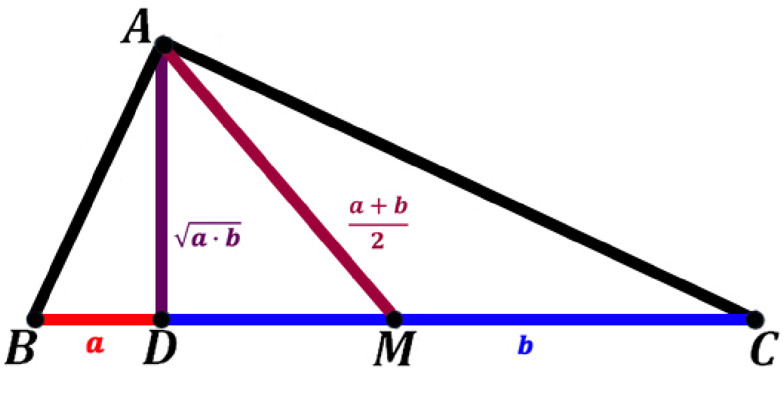


6. L'aire mathématique du carré de côté $a + b$, $(a + b)^2$ est 8 fois plus grande que celle d'un triangle rectangle de cathète a et b, qui est $8 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$. Et on obtient l'inégalité, seulement si $a = b$.



Activité 4 - 5 minutes (uniquement effectué s'il reste 15 minutes pour l'évaluation)

L'enseignant présente une interprétation géométrique de l'inégalité des moyennes :



Dans tout triangle rectangle, la hauteur correspondant à l'hypoténuse est la moyenne géométrique des projections des cathètes sur l'hypoténuse, et la médiane correspondant à l'hypoténuse est la moyenne arithmétique des projections des cathètes sur l'hypoténuse. La longueur de la hauteur est inférieure ou égale à la longueur de la médiane.

Des solutions complètes sont requises pour tous les problèmes. L'utilisation d'une calculatrice de poche est autorisée.

1. Déterminez la véracité de la phrase suivante:

„$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc}, \forall a, b, c \in (0, \infty)$" (vrai ou faux) et expliquez votre choix.

2. Calculez la moyenne arithmétique des nombres 3, 4, 27, 64. Calculez la moyenne géométrique des nombres : 3, 4, 27, 64. Comparez les résultats.

3. Calculez la moyenne arithmétique des nombres $3+\sqrt{8}$ and $3-\sqrt{8}$.

4. Calculez la moyenne géométrique des nombres $3+\sqrt{8}$ and $3-\sqrt{8}$.

5. Une personne dépose à la banque un montant (capital initial) de 1000000 lei sur une période de 3 ans, avec des taux d'intérêt annuels variant comme suit : 1%, 4%, 5%. Calculez le capital final à la fin des 3 ans.

Le temps de travail est de 15 minutes.

Solutions :

1. L'affirmation est fausse. Si $a = b = c$, alors l'inégalité devient une égalité.

2. $\frac{3+4+27+64}{4} = \frac{98}{4} = 24{,}5$. $\sqrt[4]{3 \cdot 4 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^4} = 2^2 \cdot 3 = 12$. AM>GM.

3. $\frac{(3+\sqrt{8})+(3-\sqrt{8})}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

4. $\sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})} = \sqrt{9-8} = 1$.

5. Solution 1

Nous calculons le capital final correspondant à chaque année :

Année 1: $C_1 = C_0 \cdot \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{p_1}}{\mathbf{100}}\right)$ = 1000000·1,01=1010000 lei
Année 2: $C_2 = C_1 \cdot \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{p_2}}{\mathbf{100}}\right)$ = 1010000·1,04=1050400 lei
Année 3: $C_3 = C_2 \cdot \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{p_3}}{\mathbf{100}}\right)$ = 1050400·1,05= 1102920 lei.

Solution 2

Nous calculons le coefficient moyen : $1 + \frac{p}{100} = \sqrt[3]{1{,}01 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05} = \sqrt[3]{1{,}10292} \approx 1{,}0331927199$.

Nous calculons le capital final : $C_3 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \approx 1000000 \cdot (1{,}0331927199)^3 \approx 1000000 \cdot 1{,}10292 \approx 1102920$ lei.

LIGNES DIRECTRICES SUR L'INCLUSION

Chaque élève est différent et ses besoins en matière de supports peuvent varier. Vous trouverez ci-dessous plusieurs conseils qui pourraient rendre les cours de mathématiques plus inclusifs pour les élèves qui souffrent de troubles de l'apprentissage.

- Lorsque vous donnez des devoirs à la classe, essayez de les décomposer en petits morceaux. Évitez les doubles tâches dans les instructions. N'oubliez pas qu'en cas d'opérations/exercices comportant plusieurs étapes, il est essentiel d'aider les apprenants à décomposer les étapes.

- Vous pouvez utiliser des listes de suivi pour vos élèves afin de vous assurer qu'ils ont bien effectué toutes les étapes.

- Assurez-vous que la police, l'interligne et l'alignement de votre document sont accessibles aux étudiants ayant des troubles d'apprentissage. Il est recommandé d'utiliser une police de type Arial et Comic Sans, à espacement régulier et sans empattement. Autres : Verdana, Tahoma, Century Gothic et Trebuchet. L'espacement doit être de 1,5 et essayez d'éviter toute justification dans le texte.

- À la fin de chaque activité, prenez le temps de demander aux élèves ce qu'ils ont appris pour leur rappeler chaque étape de leur processus d'apprentissage.

- Tout en utilisant différents supports (papier, ordinateur et supports visuels), choisissez un fond différent du blanc, qui peut être trop lumineux pour les élèves souffrant de troubles de l'apprentissage. Le meilleur choix serait un pastel crème ou doux, mais essayez de tester différentes couleurs pour en savoir plus sur les préférences de vos élèves.

- Pour stimuler la mémoire à court et à long terme, préparez pour tous les élèves de la classe un plan décrivant ce qu'ils vont apprendre dans cette leçon et terminez-la par un résumé de ce qui a été enseigné. Cela renforcera leur capacité à mémoriser des informations.

EXEMPLE:

1. Commencez chaque leçon par un bref "CHECK-IN"

- Aujourd'hui, nous allons étudier le sujet (nom du sujet)
- Je vais vous parler de : (nommer 3 mots-clés en rapport avec le sujet)
- Ensuite, je présenterai des exercices : (nommer les exercices du livre de l'élève)
- Ensuite, nous ferons des exercices (expliquer la façon dont l'élève travaillera : par exemple, avec le professeur / par deux / individuellement)
- Une fois que les exercices seront faits [Pour continuer]

2. Terminer ensuite la leçon par un court "RÉCAPITULATIF".

- Au cours de la leçon, nous avons appris que (sujet de la leçon)
- Les choses les plus importantes étaient : (nommer 3 mots-clés en rapport avec le sujet)
- Nous avons pu faire... (parler du travail que les élèves ont fait pendant la leçon)
- Nous explorerons le sujet la prochaine fois lorsque nous en saurons plus sur (nommer le sujet suivant)

Il s'agit d'un petit ajustement qui prendra 5 minutes de la leçon mais qui peut faire une grande différence dans la façon dont le contenu sera mémorisé. Essayez d'en faire une habitude de travail.

LITTÉERATURE

Roger B. Nelsen, Proofs Without Words II - More Exercises in Visual Thinking, Published and Distributed by The Mathematical Association of America, 2000

Internet - https://towardsdatascience.com/on-average-youre-using-the-wrong-average-geometric-harmonic-means-in-data-analysis-2a703e21ea0