SCÉNARIO DE LEÇON 06 :
PARADOXE DE MONTY HALL

Sujet : probabilité conditionnelle

Niveau : Âge 15 - 18

Connaissance préalable : événements

Corrélation : statistiques, finance, jeux d'argent, intelligence artificielle, apprentissage automatique, informatique, théorie des jeux

Temps: 60 minutes

RÉSULTATS DE L'APPRENTISSAGE

- Utiliser la théorie des probabilités
- Déterminer la probabilité conditionnelle

MÉTHODES D'ENSEIGNEMENT

- Technologie de Réalité Virtuelle (RV)
- travail individuel et travail en binôme

MOTS-CLÉS

- théorie des probabilités
- évènement
- probabilité conditionnelle
- Le paradoxe de Monty Hall

RESSOURCES

- Casques RV
- tableau noir
- ordinateur portable, calculatrice de poche, projecteur

ACTIVITÉS

INTRODUCTION : RÈGLES DE CONDUITE POUR L'UTILISATION DE LA RV EN CLASSE (5 min)

L'enseignant entame une discussion avec les étudiants en leur demandant ce qu'ils pensent de l'utilisation de la RV et de leurs attentes en matière d'utilisation de la RV en classe.

Après la discussion, l'enseignant définit les méthodes de travail et les règles de conduite pour les étudiants concernant les précautions de sécurité pour l'utilisation des casques RV dans la classe et l'apprentissage dans l'environnement virtuel :

- écouter attentivement l'enseignant
- supprimer les obstacles physiques avant d'utiliser la RV
- toujours travailler en binôme - jamais seul
- garder l'appareil propre.

ACTIVITÉ 1 (5-10 min) L'INTRODUCTION À LA LEÇON

Accessoires requis : tableau noir ou PowerPoint préparé

L'enseignant annonce le sujet de la leçon : les probabilités conditionnelles.
Les concepts qui seront utilisés sont passés en revue.

Connaissance préalable : expérience aléatoire, échantillon, événement, événement élémentaire, événement sûr, événement impossible, événements incompatibles, événement opposé, probabilité d'un événement, événements équiprobables.

Théorème. Si E - la multitude de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est finie et que tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors la probabilité de tout événement A, par rapport à l'expérience considérée, est de

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Théorème. On considère une expérience aléatoire avec E - la multitude de résultats possibles, finis et non vides, et A,B - les événements liés à l'expérience considérée.
Alors :

i)$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$, if $\mathrm{A, B}$ sont incompatibles;
ii)$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$, if $\mathrm{A, B}$ ne sont pas incompatibles;
iii)$\mathrm{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$, où $\overline{\mathrm{A}}$ est l'événement opposé à A.

ACTIVITÉ 2 (20 min) PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Accessoires requis : tableau noir ou PowerPoint préparé

L'enseignant annonce le but de la nouvelle leçon, qui est d'évaluer la probabilité d'un événement qui dépend (ou ne dépend qu'en apparence) d'un autre événement déjà consommé.

Problème 1.
Dans une urne se trouvent 5 boules blanches et 9 boules noires. Deux boules sont extraites successivement, sans remettre la boule dans l'urne. On considère les événements suivants :

A: „ la première boule extraite est noire” ;
B: „ la première boule extraite est blanche” ;
C: „ la deuxième boule extraite est blanche”.

a) Quelle est la probabilité de l'événement A?
b) Quelle est la probabilité de l'événement C sachant qu'avant sa réalisation, l'événement A a été réalisé ?
c) Quelle est la probabilité de l'évènement C sachant que l'évènement a été achevé avant que ne soit réalisé B ?

Solution.
a) $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

le nombre de cas possibles est $5 + 9 = 14$
Le nombre de cas favorables à la réalisation de l'événement A est 9, alors $P(A) = \frac{9}{14}$.
b) A l'issue de l'épreuve A, il reste 5 boules blanches et 8 boules noires dans l'urne, donc $P(C) = \frac{5}{13}$.
c) A l'issue de l'épreuve B, il reste 4 boules blanches et 9 boules noires dans l'urne, donc $P(C) = \frac{4}{13}$.

Définition. Soit deux événements $A, B \in \mathcal{P}(E)$ so $P(A) > 0$.
Est définie la probabilité conditionnelle de B étant donné A par $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
Il s'agit de $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ réalisé - la probabilité que les deux événements A et B se produisent est égale à la probabilité de A multipliée par la probabilité conditionnelle de B étant donné A.

Problème 2.
Dans une urne, il y a 5 boules blanches et 9 boules noires. Extraire successivement deux boules, sans retourner la boule dans l'urne. Quelle est la probabilité d'extraire une boule noire suivie d'une boule blanche ?

Solution.
Les événements sont les suivants :
A: „ la première boule extraite est noire”;
B: „ la deuxième boule extraite est blanche”.
On obtient $P(A) = \frac{9}{14}$ et $P(B|A) = \frac{5}{13}$
Ainsi $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{182}$.

Problème 3.
Deux dés de couleurs différentes sont lancés simultanément. Événements considérés:
A: „ le nombre obtenu sur le premier dé est inférieur à celui obtenu sur le deuxième dé”;
B: „ la somme des points obtenus sur les deux dés est inférieure ou égale à 5”.
Quelle est la probabilité conditionnelle de B étant donné A ?

Solution.
$\mathbf{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$.
Comme les dés ont des couleurs différentes, le nombre de cas possibles est de $6 \cdot 6 = 36$.
$\mathbf{A = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}}$
$\mathbf{B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}}$
$\mathbf{A \cap B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3)\}}$
Ainsi $P(A) = \frac{15}{36}$, $P(B) = \frac{10}{36}$, $P(A \cap B) = \frac{4}{36}$ și $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{4}{15}$.

ACTIVITÉ 3 (15 min) PROBABILITÉ CONDITIONNELLE DANS UNE APPLICATION RV

L'enseignant attribue la tâche aux élèves.
Étudiant:

- trouve et sélectionne l'exercice MONTY HALL PARADOX sur l'étagère des exercices
- résout des tâches dans une application RV

Forme de travail : travail en binôme
Accessoires requis : Casque RV

ACTIVITÉ :

L'enseignant répartit les élèves en binômes.
L'enseignant présente le problème de Monty Hall aux élèves.

Qu'est-ce que le problème de Monty Hall?

Également connu sous le nom de paradoxe de Monty Hall, de problème des trois portes, de problème du quizmaster et de problème de la voiture et des chèvres, ce problème a été introduit par le bio-statisticien Steve Selvin (1975) dans une lettre adressée à la revue The American Statistician. Selon les hypothèses retenues, il peut être considéré comme mathématiquement identique au problème des trois prisonniers de Martin Gardner (1959). Selvin l'a nommé d'après le nom de scène de l'animateur du quiz, Monty Halperin, de l'émission télévisée des années 1960 "Let's make a Deal". Il s'agit d'un paradoxe célèbre dont la solution est si absurde que la plupart des gens refusent de croire qu'elle est vraie.

Le problème est devenu mondialement célèbre en 1990 avec sa présentation dans la rubrique hebdomadaire populaire "Ask Marilyn" du magazine Parade. L'auteur, Marilyn vos Savant, était, selon le livre des records Guiness de l'époque, la personne ayant le plus haut QI au monde. Réécrivant dans ses propres mots un problème qui lui avait été posé par un correspondant, Craig Whitaker, vos Savant posait la question suivante :

“Supposons que vous participez à un jeu télévisé et que l'on vous donne le choix entre trois portes : derrière l'une d'elles se trouve une voiture ; derrière les autres, des chèvres. Vous choisissez une porte, disons la n° 1, et l'animateur, qui sait ce qui se trouve derrière les portes, ouvre une autre porte, disons la n° 3, qui contient une chèvre. Il vous dit alors : "Voulez-vous choisir la porte n° 2 ?" Est-ce que c'est un avantage pour vous de changer votre choix ?”

L'élève A met soigneusement son casque RV et ouvre l'exercice PARADOXE DE MONTY HALL dans la bibliothèque virtuelle de l'application RV.
L'élève B (joueur) choisit une porte, l'élève A (hôte) ouvre une des portes restantes. Ensemble, ils déterminent quelle porte a la probabilité correcte pour le deuxième choix. Les probabilités correctes sont $\frac{1}{3}$ pour la porte choisie à l'origine et $\frac{2}{3}$ pour la porte qui doit être choisie une deuxième fois.

Solutions simples

La solution présentée par vos Savant dans Parade montre les trois dispositions possibles d'une voiture et de deux chèvres derrière trois portes et le résultat du maintien ou du changement après avoir choisi initialement la porte 1 dans chaque cas :

Derrière la porte 1	Derrière la porte 2	Derrière la porte 3	Résultat si on reste à la porte #1	Résultat si l'on passe à la porte proposée
Chèvre	Chèvre	Voiture	Reçoit Chèvre	Reçoit Voiture
Chèvre	Voiture	Chèvre	Reçoit Chèvre	Reçoit Voiture
Voiture	Chèvre	Chèvre	Reçoit Voiture	Reçoit Chèvre

Un joueur qui reste sur son choix initial ne gagne que dans un cas sur trois de ces possibilités également probables, tandis qu'un joueur qui change gagne dans deux cas sur trois.

Une autre façon de comprendre la solution est de considérer les deux portes originales non choisies ensemble. Les 2/3 de chances de trouver la voiture n'ont pas été modifiées par l'ouverture de l'une de ces portes car Monty, connaissant l'emplacement de la voiture, est certain de révéler une chèvre. Ainsi, le choix du joueur après l'ouverture d'une porte par l'animateur n'est pas différent de celui qu'il aurait fait si l'animateur lui avait proposé de passer de la porte initialement choisie à l'ensemble des deux portes restantes. Dans ce cas, l'échange donne clairement au joueur une probabilité de 2/3 de choisir la voiture.

Probabilité conditionnelle par calcul direct

Par définition, la probabilité conditionnelle de gagner par permutation, étant donné que le concurrent choisit initialement la porte 1 et que l'hôte ouvre la porte 3, est la probabilité de l'événement "la voiture est derrière la porte 2 et l'hôte ouvre la porte 3" divisée par la probabilité de l'événement "l'hôte ouvre la porte 3". Ces probabilités peuvent être déterminées en se référant au tableau de probabilités conditionnelles ci-dessous.

La probabilité conditionnelle de gagner par commutation est de $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$.

Voiture cachée derrière la porte 3	Voiture cachée derrière la porte 1		Voiture cachée derrière la porte 2
Le joueur choisit initialement la porte 1			
L'hôte doit ouvrir la porte 2	L'hôte ouvre aléatoirement la porte 2	L'hôte ouvre aléatoirement la porte 3	L'hôte doit ouvrir la porte 3
Probabilité 1/3	Probabilité 1/6	Probabilité 1/6	Probabilité 1/3
L'échange est gagnant	L'échange est perdant	L'échange est perdant	L'échange est gagnant
Lorsque l'hôte ouvre la porte 2, il gagne deux fois plus souvent en changeant de place qu'en restant		Lorsque l'hôte ouvre la porte 3, il gagne deux fois plus souvent en changeant de place qu'en restant	

EVALUATION

1. J'aime la façon de travailler dans cette leçon.	1	2	3	4	5
2. Cette leçon était intéressante.	1	2	3	4	5
3. Ce que j'étais censé apprendre dans cette leçon est clair.	1	2	3	4	5
4. Le sujet a été clairement expliqué.	1	2	3	4	5
5. J'ai acquis des connaissances sur le sujet.	1	2	3	4	5
6. Je pense avoir participé activement à cette leçon.	1	2	3	4	5
7. J'étais plus actif dans cette leçon que d'habitude.	1	2	3	4	5
8. En étant actif, j'ai contribué à la qualité de la leçon.	1	2	3	4	5
9. J'étais motivé pour travailler dans cette leçon.	1	2	3	4	5
10. Je préfère utiliser la RV dans les cours.	1	2	3	4	5
11. Nommez deux choses que vous avez appréciées dans cette leçon.					
12. Nommez deux choses que vous n'avez pas aimées dans cette leçon.					

Chaque élève est différent et ses besoins en la matière peuvent varier. Vous trouverez ci-dessous plusieurs conseils qui pourraient rendre les cours de mathématiques plus inclusifs pour les élèves souffrant de troubles de l'apprentissage.

- Lorsque vous donnez des devoirs à la classe, essayez de les diviser en petits éléments d'information. Évitez les doubles tâches dans les instructions. N'oubliez pas que dans le cas d'opérations/exercices comportant plusieurs étapes, il est essentiel d'aider les apprenants à décomposer les étapes.
- Vous pouvez utiliser des listes de contrôle pour vos élèves afin de vous assurer qu'ils ont suivi toutes les étapes.
- Assurez-vous que la police, l'interlignage et l'alignement de votre document sont accessibles aux étudiants ayant des troubles de l'apprentissage. Il est recommandé d'utiliser une police sans empattement, à espacement régulier, telle que Arial et Comic Sans. Autres : Verdana, Tahoma, Century Gothic et Trebuchet. L'espacement doit être de 1,5 et il faut éviter les justifications dans le texte.
- À la fin de chaque activité, prenez le temps de demander aux élèves ce qu'ils ont appris afin de reconnaître chaque étape de leur processus d'apprentissage.
- Veillez à ce que le matériel manipulé par les étudiants soit suffisamment facile à apprehender.
- Lorsque vous utilisez différents supports (papier, ordinateur et aides visuelles), choisissez un fond différent du blanc, qui peut être trop lumineux pour les élèves souffrant de troubles de l'apprentissage. Le meilleur choix serait le crème ou le pastel doux, mais essayez de tester différentes couleurs pour en savoir plus sur les préférences des élèves.
- Pour stimuler la mémoire à court et à long terme, préparez pour tous les élèves de la classe un plan décrivant ce qu'ils vont apprendre au cours de cette leçon et terminez par un résumé de ce qui a été enseigné. De cette façon, ils renforceront leur capacité à se souvenir des informations.

EXEMPLE:

1. Commencez chaque leçon par un bref "CHECK-IN".

- Aujourd'hui, nous allons étudier le sujet (nom du sujet)
- Je vais vous parler de : (nommez 3 mots-clés en rapport avec le sujet)
- Ensuite, je présenterai des exercices : (nommez les exercices du livre de l'élève)
- Ensuite, nous ferons des exercices (expliquer la façon dont les élèves travailleront : ex. ensemble avec le professeur / par deux / individuellement)
- Une fois les exercices terminés [Pour continuer]

2. Puis terminez la leçon par un bref "CHECK-OUT".

- Pendant la leçon, nous apprenons à connaître (sujet de la leçon)
- Les éléments les plus importants étaient : (citer 3 mots-clés en rapport avec le sujet)
- Nous avons pu faire... (parler du travail effectué par l'élève pendant la leçon)
- Nous explorerons ce sujet la prochaine fois lorsque nous étudierons (nommez le sujet suivant)

Il s'agit d'un petit ajustement qui prendra 5 minutes de la leçon mais qui peut faire une grande différence dans la façon dont le matériel sera mémorisé. Essayez d'en faire une habitude de travail.