



## SCENARIJ POUČAVANJA 08: NEJEDNAKOST IZMEĐU ARITMETIČKE I GEOMETRIJSKE SREDINE

Tema: Brojevi

Razina: 14 -15 godina

Predznanje: računske operacije s razlomcima, aritmetička sredina, geometrijska sredina, početni ulog, konačni ulog, jednostavne i složene kamate

Korelacija: Financijska matematika, umjetnost, arhitektura

Vrijeme: 60 minuta



### ISHODI UČENJA

- primijeniti aritmetičku i geometrijsku sredinu u praktičnim, konkretnim situacijama

### NASTAVNE METODE

- VR tehnologija
- Samostalan rad i rad u paru

### KLJUČNE RIJEČI

- srednja vrijednost
- aritmetička sredina
- geometrijska sredina
- nejednakost

### POTREBAN PRIBOR

- VR naočale
- ploča
- radni listovi
- geometrijski pribor, škare
- računalo, projektor
- džepno računalo

## AKTIVNOSTI

### UVOD: PRAVILA PONAŠANJA PRI KORIŠTENJU VR TEHNOLOGIJE U UČIONICI (5 min)



## ARITMETIČKA I GEOMETRIJSKA SREDINA

### AKTIVNOST 1 (10 min)

Nastavnik predstavlja temu lekcije i podsjeća učenike na značenje sljedećih pojmova:

Riječ „prosječan/srednji“ pronalazimo u svakodnevnom govoru, u izrazima poput:

"prosječan vijek ljudskog života", "prosječan vijek trajanja uređaja", "prosječna težina proizvoda". Prosjek je srednja vrijednost skupa podataka. Kako bi prosječna vrijednost bila objektivna, potrebno je odabrati odgovarajući tip sredine (matematički naziv za prosjek). Najčešće korištene sredine su: aritmetička sredina, geometrijska sredina, harmonijska sredina, kvadratna sredina.

Aritmetička sredina niza brojeva  $x_1, x_2, \dots, x_n$  je zbroj tih brojeva podijeljen s  $n$ :

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Geometrijska sredina je definirana kao  $n$ -ti korijen umnoška svi  $n$  pozitivnih realnih brojeva. Za skup pozitivnih realnih brojeva  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , geometrijska sredina jest broj:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Nastavnik predstavlja nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine.

Za skup  $n$  pozitivnih realnih brojeva  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine (kraće: A-G nejednakost) je dana izrazom:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n},$$

Pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

U slučaju dva pozitivna realna broja  $a$  i  $b$  vrijedi:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

s jednakošću samo u slučaju  $a = b$ .

## VIZUALNI DOKAZ A-G NEJEDNAKOSTI

### AKTIVNOST 2 (10 min)

Nastavnik dijeli učenike u parove i daje upute za rad.

Potreban pribor: radni listovi, geometrijski pribor, škare

U nastavku se nalazi vizualna demonstracija:



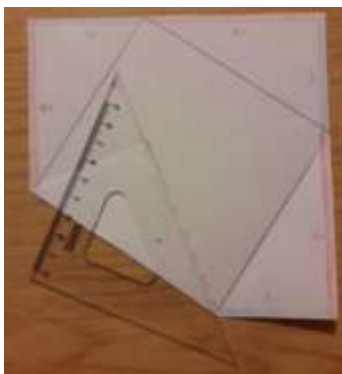
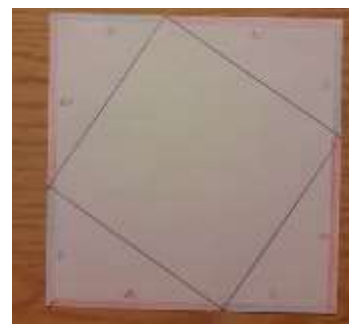
1. Izreži kvadrat iz lista papira.



2. Podijeli svaku stranicu kvadrata na dva dijela s duljinama  $a$  i  $b$ .



3. Nacrtaj dužine koje spajaju točke na susjednim stranicama kvadrata, kao što je prikazano na slici:



4. Preklopi rub papira duž dobivenih dužina.



5. Nacrtaj isprekidanu crtu uz dužu stranu ruba preklopljenog papira (duljina  $a$  u našoj ilustraciji).



6. Površina kvadrata sa stranicama duljina  $a + b$ , je veća od površine 8 pravokutnih trokuta s katetama  $a$  i  $b$ :

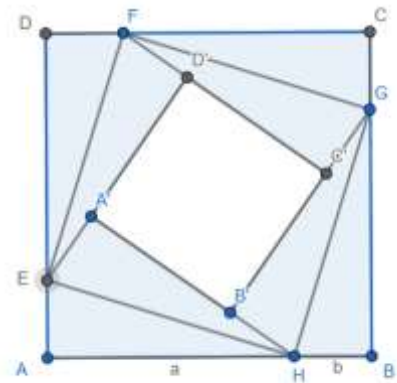
$(a + b)^2 > 8 \frac{ab}{2}$ . Jednakost površina se dobije samo u slučaju  $a = b$ .

Nakon što učenici izvrše praktičan zadatak, nastavnik im pokazuje simulaciju u Geogebra aplikaciji koji prikazuje isti postupak i zapisuje dokaz AG-nejednakosti:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{a \cdot b} \Leftrightarrow$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$



### AKTIVNOST 3 (10 min)

Nastavnik dijeli učenike u parove. Učenik A pažljivo postavlja VR naočale, učenik B mu pomaže.

Učenik A u VR aplikaciji odabire vježbu NEJEDNAKOST IZMEĐU ARITMETIČKE I GEOMETRIJSKE SREDINE i rješava zadatak u virtualnom okruženju.

U zadatku je potrebno mijenjati duljinu segmenata a i b te promatrati razlike između dviju površina.

Nakon odrađenog zadatka slijedi zamjena uloga.

### AKTIVNOST 4 (15 min)

#### Radni list sa zadacima

1. Provjeri istinitost matematičke tvrdnje:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, \forall a, b \in \langle 0, +\infty \rangle \quad (\text{točno ili pogrešno}) \text{ i obrazloži svoj odgovor.}$$

2. Izračunaj aritmetičku sredinu brojeva 3, 4, 27, 64. Izračunaj geometrijsku sredinu brojeva: 3, 4, 27, 64. Usporedi dobivene rezultate.

3. Izračunaj aritmetičku sredinu brojeva  $3 + \sqrt{8}$  i  $3 - \sqrt{8}$ . . Izračunaj geometrijsku sredinu brojeva  $3 + \sqrt{8}$  i  $3 - \sqrt{8}$ .

Usporedi dobivene rezultate

Rješenja zadataka:

1. Tvrdnja je pogrešna. Ako je  $a = b$ , nejednakost postaje jednakost.

$$2. \frac{3 + 4 + 27 + 64}{4} = \frac{98}{4} = 24,5$$

$$\sqrt[4]{3 \cdot 4 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^4} = 2^2 \cdot 3 = 12 \quad A > G.$$

$$3. \frac{(3 + \sqrt{8}) + (3 - \sqrt{8})}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\sqrt{(3 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{8})} = \sqrt{9 - 8} = 1 \quad A > G$$

## EVALUACIJA (5 min)

1. Sviđa mi se način rada na ovom satu	1	2	3	4	5
2. Ovaj sat mi je bio zanimljiv	1	2	3	4	5
3. Jasno mi je što sam trebao naučiti na ovom satu	1	2	3	4	5
4. Gradivo je bilo jednostavno objašnjeno	1	2	3	4	5
5. Savladao sam gradivo	1	2	3	4	5
6. Smatram da sam bio aktivan na ovom satu	1	2	3	4	5
7. Na ovom satu bio sam aktivniji nego inače	1	2	3	4	5
8. Svojom aktivnošću doprinio sam kvaliteti nastave	1	2	3	4	5
9. Bio sam motiviran za rad na ovom satu	1	2	3	4	5
10. Preferiram korištenje VR-a u nastavi	1	2	3	4	5
11. Navedi dvije stvari koje su ti se sviđale na satu:					
12. Navedi dvije stvari koje ti se nisu sviđale na satu:					

## SMJERNICE ZA PRILAGODBU POUČAVANJA

Svaki se učenik razlikuje i njihove potrebe za usvajanje ishoda mogu se razlikovati. U nastavku je nekoliko savjeta kako prilagoditi ostvarivanje ishoda učenicima s teškoćama u učenju.

- Kada dajete zadatke učenicima, pokušajte ih podijeliti na manje dijelove. Izbjegavajte dvostruke zadatke u uputama. Imajte na umu da je u slučaju operacija/vježbi s više koraka potrebno pomoći učenicima u pojedinim koracima.
- Možete koristiti liste za provjeru svakog pojedinog koraka učenika kako biste bili sigurni da su učinili sve korake.
- Pazite da font, razmak između redova i poravnanje vašeg dokumenta budu primjereni učenicima s teškoćama u učenju. Preporučuje se upotreba običnog, ravnomjerno raspoređenog sans serif fonta, kao što su Arial i Comic Sans. Ostali: Verdana, Tahoma, Century Gothic i Trebuchet. Razmak bi trebao biti 1,5 i pokušajte izbjeći obostrano poravnanje u tekstu.
- Na kraju svake aktivnosti odvojite malo vremena i pitajte učenike što su naučili i ponovite svaki korak u njihovom procesu učenja.
- Provjerite je li materijal dovoljno jednostavan učenicima za korištenje.
- Dok koristite različite medije (papir, računala i vizualna pomagala), odaberite pozadinu koja nije bijela jer učenicima s poremećajima učenja ona može biti svijetla. Najbolji izbor bi bila krem ili nježna pastelna boja, ali pokušajte testirati različite boje kako biste saznali više o preferencijama učenika.
- Da biste potaknuli kratkotrajno i dugoročno pamćenje, pripremite za sve učenike u učionici upute koje opisuju što će naučiti u ovoj lekciji i završite je rezimeom naučenog. Na taj će način ojačati sposobnost pamćenja informacija.

### PRIMJER:

#### 1. Svaku lekciju započnite kratkim „ulaznim“ informacijama

- Danas ćemo proučavati temu (naziv teme)
- Reći ću vam o: (navedite 3 ključne riječi povezane s temom)
- Zatim ću predstaviti vježbe: (imenovati vježbe iz udžbenika)
- Zatim ćemo raditi vježbe (objasniti način rada učenika: npr. zajedno s učiteljem / u parovima / pojedinačno)
- Kad provedemo vježbe [Nastaviti]

#### 2. Zatim završite lekciju kratkim "izlaznim" informacijama

- Na temelju dane nastavne jedinice moći ćemo (tema lekcije)
- Najvažniji ishodi: (imenovati 3 ključne riječi povezane s temom)

- **Možemo...** (ispričati o radu učenika tijekom predavanja)
- **Primijenit ćemo ostvarene ishode sljedeći put kada ćemo učiti o (imenovati sljedeću temu).**

**Napomene vezane uz prilagodbu oduzet će 5 minuta u realizaciji nastavne jedinice, ali mogu napraviti veliki pomak u načinu na koji će se usvojiti ishodi. Pokušajte ovo usvojiti kao rutinu u radu.**